doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2009.06.011

基于阿克曼原理的车式移动机器人运动学建模

任孝平,蔡自兴
(中南大学 信息科学与工程学院,湖南 长沙 410083)

摘 要:基于阿克曼原理的轮式移动机器人运动学模型对于无人驾驶车辆的研究有着重要的意义.对轮式移动机器人的运动学特性进行了分析,建立了不考虑滑行、刹车等的轮式移动机器人的运动学模型.对该运动学模型引入了阿克曼约束,给出了描述机器人运动状态的转向角、航向角和转弯半径等物理量的数学公式.最后对该运动学模型进行仿真实验,验证了所建立的运动学模型的正确性,为进一步研究轮式移动机器人提供了理论分析的基础.

关键词:轮式移动机器人;运动学模型;阿克曼原理;转向特性
中图分类号:TP242.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-4785(2009)06-0534-04

Using the Ackerman principle for kinematic modeling of wheeled mobile robots

REN Xiao-ping, CAI Zi-xing
(School of Information Science & Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Applying the Ackerman principle to kinematic modeling of wheeled mobile robots is of vital importance for improving the performance of unmanned autonomous vehicles. The kinematic characteristics of wheeled mobile robots were analyzed in this paper, and a kinematic model was set up that did not consider sliding or braking. The Ackerman principle was then introduced to this kinematic model. Mathematical formulas were proposed for turning angle, steering angle and turning radius. These accurately reflect the movement status of the mobile robot, providing a theoretical basis for analysis of future intelligent vehicles. The conclusions were validated through a simulation.

Keywords: wheeled mobile robot; kinematics model; Ackerman principle; turning characteristics

自主移动机器人的运动轨迹控制至关重要,而确定运动轨迹的关键因素是建立准确的运动学模型[1],它是对机械系统如何运动的最基本的研究[2].目前有关运动学的理论分析和建模方法已经得到了深入的研究,而且广泛地应用于各种类型的移动机器人上[1,3-4].

机器人的运动机构较之普通的车辆来说更为复杂,因为它要能应用在种类繁多的环境中.由于不同的移动机器人面临各种不同环境,没有单一的轮子结构可以使它们对环境的机动性、可控性和稳定性达到最大.目前移动机器人的轮子结构种类繁多[5],常用的轮子类型有[6]:标准轮、小脚轮、瑞典轮和球形轮等.在运动学方面,它们的差别很大,从而对整个机器人的运动学有很大的影响[2].普通汽车大都为高度标准化的环境(公路网络)而设计,全部共享相同的轮子结构,使得它们对标准化环境的这些品质可以最大化.汽车中广泛采用的 Ackerman(阿克曼)轮子结构,除了应用于为道路系统设计的移动机器人外,其他机器人很少使用.文献[7]主要研究了控制四轮车辆的稳定驾驶的问题,目前对四轮车式移动机器人的运动学建模的文献相对较少.

1 四轮车式机器人的运动学建模

首先对四轮车辆的水平面运动进行研究.在整个分析过程中,将机器人建模成轮子上的一个刚体,运行在水平面上时,车轮与地面只有点接触,轮子不可发生形变且是纯滚动,不发生滑行、刹车等行为,忽略车轮外倾、侧偏以及轮胎的影响[8].针对车式机器人的运动学建模,不能单一用后轴中点进行建模[9],还应该取前轴或者其他参考点.这是因为车

收稿日期:2009-10-02.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(90820302,60805027);国家博士点基金资助项目(200805330005);湖南省院士基金资助项目(2009FJ4030).
通信作者:任孝平. E-mail: xiaopingren@gmail.com.

式机器人相对于普通机器人转弯半径较大,若不取多个参考点,不能完全体现它的运动情况[10].

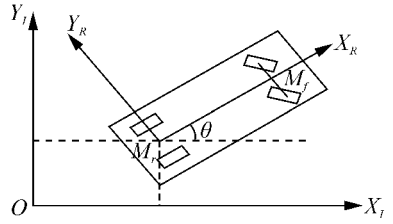


图 1　四轮车式移动机器人的局部坐标系和全局坐标系

Fig. 1　Local and global coordinate system of car-like robot

为了描述机器人在平面中的位置,建立全局坐标系 X_IOY_I 和机器人局部坐标系 X_RMY_R,选择后轴中点 M_r 作为局部坐标系的原点. 在全局坐标系中,M_r 由(x_r,y_r)确定,$M_f(x_f,y_f)$为前轴中点坐标. 在 X_IOY_I 中 M_r 和 M_f 的坐标关系为

$$\begin{cases} x_f = x_r + l\cos\theta, \\ y_f = y_r + l\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

全局和局部参考系之间的角度差为 θ(θ 为机器人的航向角),令 $\boldsymbol{\zeta}^I = [x,y,\theta]^{\mathrm{T}}$ 为机器人在全局参考系中的位姿. 用正交旋转矩阵 $\boldsymbol{R}(\theta)$ 将全局参考系 X_IOY_I 映射到局部参考系 X_RMY_R 中,即 $\boldsymbol{\zeta}^R = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{\zeta}^I$,反之则有 $\boldsymbol{\zeta}^I = \boldsymbol{R}(\theta)^{-1}\boldsymbol{\zeta}^R$.

式中:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

机器人局部坐标系如图 2 所示,l 为轴距,φ 为车轮转向角,d 为轮距,ICR(instantaneous center of rotation)为瞬时转动中心[11]. 设 M_r、M_f 的瞬时转弯半径分别为 ρ_r、ρ_f.

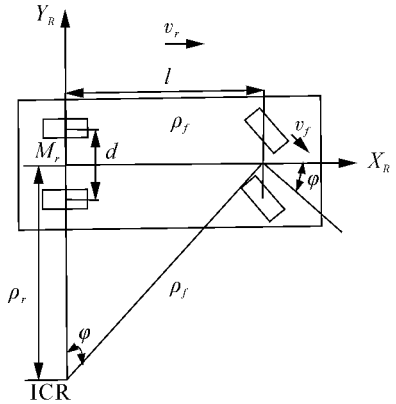


图 2　机器人局部坐标系

Fig. 2　Local coordinate system of the robot

机器人的整体速率为后轮速率 v_r,沿着局部坐标系 X_R 正方向;v_f 为前轮的速率,沿着轮子前进的方向,v_r 与 v_f 的关系为

$$v_f = v_r/\cos\varphi. \tag{2}$$

在 Δt 时间内,后轮 X_R 正向前进分量为 $v_t\mathrm{d}t$,Y_R 方向无运动分量;前轮 X_R 正方向前进分量为 $v_f\cos\varphi\mathrm{d}t$,$Y_R$ 正方向前进分量为$v_f\sin\varphi\mathrm{d}t$. 若 φ 不变,机器人瞬时沿着圆轨迹运动,瞬时前进的距离为 Δs,则有 $\mathrm{d}s = \rho\mathrm{d}\theta$,如图 3 所示. 此时下式成立:

$$\rho \cdot \mathrm{d}\theta = v \cdot \mathrm{d}t. \tag{3}$$

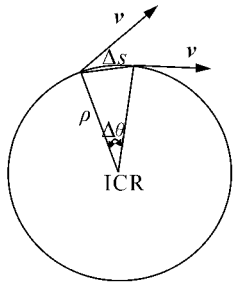


图 3　机器人瞬时沿圆周运动

Fig. 3　The circumferential movement system track of the robot

另在直角三角形内有 $\rho = l/\tan\varphi$,$\rho_f = l/\sin\varphi$,从而可得 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{v_r \cdot \mathrm{d}t}{\rho_r} = \dfrac{v_r \cdot \tan\varphi}{l}\mathrm{d}t$,即$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\tan\varphi}{l}v_r$,同理可得$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sin\varphi}{l}v_f$. 此时 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_r^R = [v_r \quad 0 \quad \dfrac{\tan\varphi}{l}v_r]^{\mathrm{T}}$,$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_f^R = [v_f\cos\varphi \quad v_f\sin\varphi \quad \dfrac{\sin\varphi}{l}v_f]^{\mathrm{T}}$. M_r 在全局坐标系 X_IOY_I 中的位姿状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_r^I = \boldsymbol{R}(\theta)^{-1}\dot{\boldsymbol{\zeta}}_r^R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [v_r \quad 0 \quad \frac{v_r}{l}\tan\varphi]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_r^I = [v_r\cos\theta \quad v_r\sin\theta \quad \frac{v_r}{l}\tan\varphi]^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

M_f 在全局坐标系中的位姿状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_f^I = \boldsymbol{R}(\theta)^{-1}\dot{\boldsymbol{\zeta}}_f^R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [v_f\cos\varphi \quad v_f\sin\varphi \quad \frac{\sin\varphi}{l}v_f]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_f^I = [v_f\cos(\theta+\varphi) \quad v_f\sin(\theta+\varphi) \quad \frac{v_f}{l}\sin\varphi]^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

将式(2)代入(7)得

$$\dot{\zeta}_f^I = [v_r \frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos\varphi} \quad v_r \frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi} \quad \frac{v_r}{l}\tan\varphi]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

此时,分别建立起 M_r 和 M_f 的状态方程(5)和(8),都与 θ、φ、v_r 有关.

2 阿克曼约束的机器人运动模型

四轮车辆的理想模型中,实际上是将前面的 2 个轮子看成了一个轮子在运动,如图 4 所示. 在实际的车式移动机器人转向过程中,为了使所有车轮都处于纯滚动而无滑动,要求转向轴内、外轮转角之间符合阿克曼原理[11]. 令 φ_2 为内轮的相对转向角,φ_1 为外轮的相对转向角. 为了实现转向时转向车轮的纯滚动,不发生横向滑移,4 个车轮应绕 ICR 转动,并且内外轮转角之间应该满足式(9)[10]:

$$\cot\varphi_1 - \cot\varphi_2 = \frac{\rho_r + d/2}{l} - \frac{\rho_r - d/2}{l} = \frac{d}{l}. \tag{9}$$

可以解得

$$\begin{cases} \cot\varphi_1 = \cot\varphi + d/2l, \\ \cot\varphi_2 = \cot\varphi - d/2l. \end{cases} \tag{10}$$

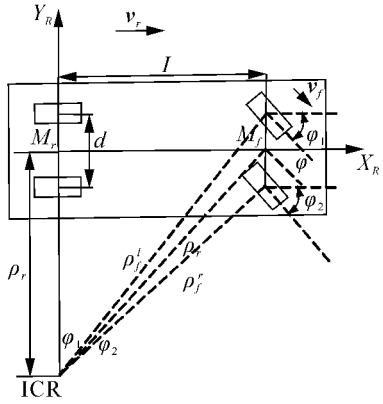


图 4 基于阿克曼原理的机器人运动模型

Fig. 4 Kinematics modeling of car-like moblie robot based on Ackerman principle

设 ρ_f^l 和 ρ_f^r 分别为左右两前轮的瞬时转弯半径,得 $\rho_f^l = l/\sin\varphi_1$,$\rho_f^r = l/\sin\varphi_2$. 同理可得左右后轮的瞬时转弯半径 $\rho_r^l = l/\tan\varphi + d/2$,$\rho_r^r = l/\tan\varphi - d/2$. 定义内轮差 $\Delta\rho = \rho_f^l - \rho_r^l$(左转向时为 $\Delta\rho = \rho_f^r - \rho_r^r$)[11].

3 仿真实验

在 Matlab 7.0 上对四轮车式移动机器人的运动学模型进行仿真实验. 仿真参数为:轴距 $l = 2.7$ m,$d = 1.5$ m,$v_r = 10$ m/s. 设初始位姿 $\zeta_r^I = [0\ 0\ \pi/4]^{\mathrm{T}}$,根据式(1)可得 $\zeta_f^I = [1.9 \quad 1.9 \quad \pi/4]^{\mathrm{T}}$. 机器人实际运动过程中,转向角 φ 保持不变时做圆周运动. 在仿真过程中,φ 取为时间 t 的函数 $\varphi(t)$. 机器人运动的轨迹图如图 5 所示,分别代表了前后轮轴中点的运动轨迹.

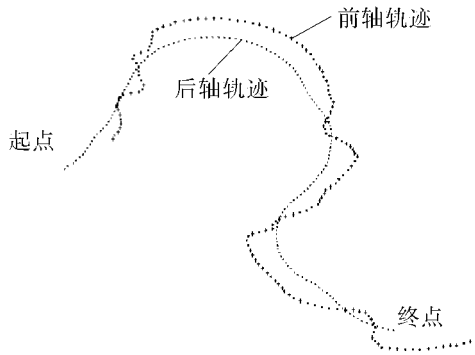


图 5 机器人的运动轨迹图

Fig. 5 Movement track of the robot

图 6 中所示为虚拟转向角 φ 与实际车辆转向角 φ_1、φ_2 间的关系图. φ_1 与 φ_2 的变化趋势较为一致,据式(9)可得 $\cot\varphi_1 - \cot\varphi_2$ 的理论值为 0.555 6,实际仿真结果值为 0.550 5,误差在可接受范围内.

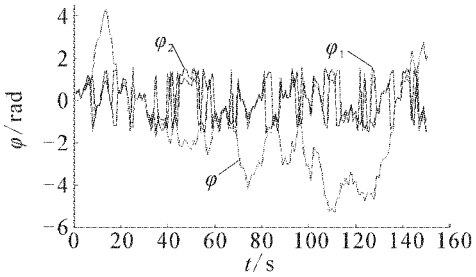


图 6 转向角 φ_1、φ_2、φ 间的关系

Fig. 6 Turning angles φ_1, φ_2 *and* φ

图 7 反映了转向角 φ 与航向角 θ 的关系,航向角 θ 大致可分为 4 个阶段,如图中 A、B、C 标记所示. 初始阶段随着 φ 的变化 θ 逐渐增大,当 φ 向相反方向逐渐变大时,θ 在点 A 处才开始逐渐变小. 在 A-B 阶段,φ 的微小变化并没有影响到整车运动的方向;到 B-C 阶段,θ 又随着 φ 的反向开始变化. 实验有效地验证了该运动模型符合实际机器人转向角与航向角间的关系.

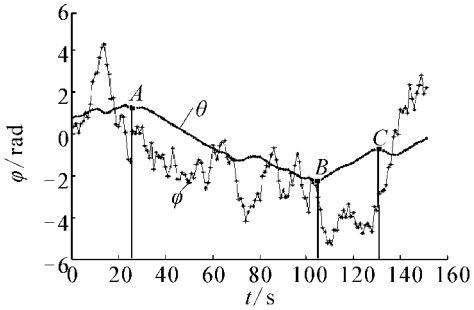


图 7 转向角 φ 和航向角 θ 的关系

Fig. 7 Truning angle φ and direction θ

图 8 所示为航向角 θ 与内轮差 $\Delta\rho$ 间的关系. 从图中可以看出,当航向角 θ 有较大改变时,内轮差 $\Delta\rho$ 的变化并不明显. 可见 $\Delta\rho$ 与 θ 的关系并不密切,而仅与转向角 φ_1、φ_2 的变化有关,这点从 $\Delta\rho$ 的数学公式上也可分析出.

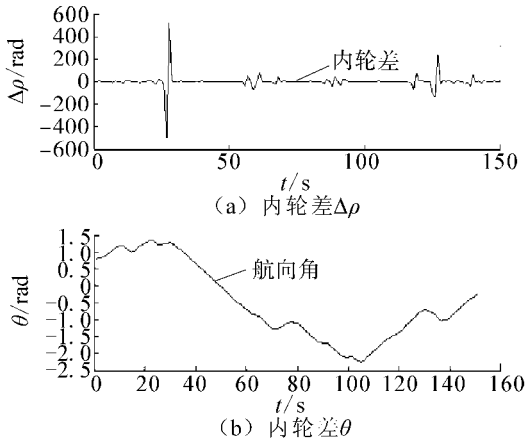


图 8　航向角 θ 和内轮差 $\Delta\rho$ 对比图

Fig. 8　Direction θ and inner-tyre minus $\Delta\rho$

4　结束语

本文首先分析了四轮车式移动机器人的运动特性,建立了不考虑滑行、刹车等的四轮机器人理想运动学模型. 向该理想运动学模型引入了阿克曼约束,同时对描述机器人运动状态的转向角、航向角和转向半径等物理量进行了分析. 通过仿真分析了左前轮转向角 φ_1 和右前轮转向角 φ_2 和理论转向角 φ 之间的关系以及转向角 φ 和航向角 θ 的关系. 实验验证了所建立的运动学模型的正确性,为进一步研究四轮车式机器人的运动控制系统设计、自主导航等工作提供了理论分析的基础.

参考文献:

[1] REN Xiaodong, FENG Zuren, CHANG Hong, MU Ruofeng. Kinematics modeling and analysis for three-wheel omnidirectional mobile robot[C]//Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, China, 2008:2608-2613.

[2] SIEGWART R, NOUBAKHSH I R. Introduction to autonomous mobile robots[M]. MA,USA: MIT Press, 2004:202-205.

[3] CHEN Lei, MA Jie, GAO Haibo. Kinematics modeling of eight-wheel lunar rover[C]//Proceedings of the 27th Chinese Control Conference. Kunming, China, 2008:346-350.

[4] 宋小康,谈大龙,吴镇炜,王越超. 全地形轮式移动机器人运动学建模与分析[J]. 机械工程学报,2008,44(6):148-154.
SONG Xiaokang, TAN Dalong, WU Zhenwei, WANG Yuechao. Kinematics modeling and analyses of all-terrain wheeled mobile robots[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(6):148-154.

[5] TLALE N, DeVILLIERS M. Kinematics and dynamics modelling of a mecanum wheeled mobile platform[C]//15th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP08). Auckland, New-Zealand, 2008: 657-662.

[6] MUIR P F, NEUMAN C P. Kinematic modeling of wheeled mobile robots CMU-RI-TR-86-12[R]. Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1986.

[7] 周文琴,贾英民. 4 轮操纵车辆改进的自适应控制[C]//2002 中国控制与决策学术年会论文集. 沈阳,2002:168-171.
ZHOU Wenqin, JIA Yingmin. Improvement adaptive control of 4WS car[C]//2002 Proceedings of Chinese Control and Decision Conference. Shenyang, 2002:168-171.

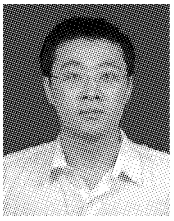
[8] 邓召文,张福兴. 基于转向半径的汽车稳态转向特性分析[J]. 农业装备与车辆工程, 2007(1):23-26.
DENG Zhaowen, ZHANG Fuxing. The analysis of steady-state steering characteristic turning radius-based in vehicle [J]. Agricultural Equipment & Vehicle Engineering, 2007 (1):23-26.

[9] MORETTE N, NOVALES C, VIEYRES P. Inverse versus direct kinematics model based on flatness and escape lanes to control CyCab mobile robot[C]//2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pasadena, CA, USA, 2008:2240-2245.

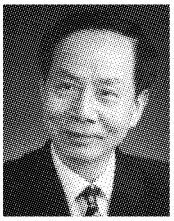
[10] RATNER D, MCKERROW P. Dynamics of the Titan four-wheel drive mobile robot with floating Ackerman steering [C]// Brisbane,1999:144-149.

[11] 孟　刚. 车辆的转向特性与阿卡曼转向原理的分析[J]. 机械研究与应用,2007,20(4):36-38.
MENG Gang. Analysis of turning characteristic and the principle of Ackerman turning for vehicle[J]. Mechanical Research & Application,2007,20(4):36-38.

作者简介:



任孝平,男,1984 年生,博士研究生,主要研究方向为多机器人系统、通信网络等,发表学术论文 10 余篇.



蔡自兴,男,1938 年生,教授、博士生导师,国际导航与运动控制科学院院士、中国人工智能学会副理事长、中国自动化学会理事. 主要研究方向为人工智能、机器人、智能控制,发表学术论文 500 余篇.