第4卷第4期 智能系统学报 Vol.4 №.4
2009年8月 CAAI Transactions on Intelligent Systems Aug. 2009

doi:10.3969/j.issn.1673-4785.2009.04.009

贝叶斯网络的非忠实性分布

杨有龙,刘 蔚,吴 艳
(西安电子科技大学 理学院,西安 710071)

摘 要:贝叶斯网络是图论和概率论有机融合的概率图形模型,主要用于统计推理和智能数据分析. 理论上通常假设由基于分布的独立关系可推出基于图结构的d-分割,即贝叶斯网络上的分布是忠实的. 针对布尔域上的贝叶斯网络,研究了非忠实分布的构成,提出了贝叶斯网络上分布延拓的概念,得到忠实分布与非忠实分布的平凡延拓均是非忠实分布.

关键词:贝叶斯网络;忠实性分布;图形模型
中图分类号:TP181;O235;O29 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-4785(2009)04-0335-04

Unfaithful distributions with respect to Bayesian networks

YANG You-long, LIU Wei, WU Yan
(School of Sciences, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Bayesian networks are a marriage between probability theory and graph theory, and thus are probabilistic graphical models. They are mainly used for statistical inference and intelligent data analysis. It is usually supposed that the network retains the d-separation criterion that characterize graph structure from the independence constraints based on distribution, that is, the distribution is a faithful distribution with respect to a Bayesian network. In this paper, some unfaithful distributions are characterized with respect to discrete Bayesian networks in a Boolean domain. It was shown that distributions trivially expanded from faithfulness or unfaithfulness are unfaithful distributions with respect to Bayesian networks.

Keywords: Bayesian networks; faithful distributions; graphical models

贝叶斯网络(Bayesian networks, BN)[1-10]也称为信念网络,是一类非常重要的概率图形模型. 它利用概率理论处理和描述不同知识成份条件下的不确定性,也是机器学习、人工智能及统计学习等领域的研究热点之一,主要应用于数据分析、推理预测以及故障诊断等方面. 贝叶斯网络的构成要素主要是:1)结构:有向非循环图(directed acyclic graph, DAG) $G=(V,E)$,其中的节点表示变量,边表示变量之间的因果关系;2)参数:描述节点(或称为顶点、变量)之间因果关系的概率分布 P.

变量集 V 上的分布 P 描述了变量之间的概率依赖关系. 表示为变量之间的独立关系. 作为图 G 上的节点集 V,有向无循环图 G 可描述节点之间的可分性,DAG 上的可分性表示为 d-分割(d-separation)[1-2,6],所以根据二者的匹配关系,可将图 G 上的分布 P 分为马尔可夫分布(Markov distribution)、忠实分布(faithful distribution)以及完美分布(perfect distribution). 对于任一有向无循环图 G,Geiger 等[4]得出 G 上的忠实分布一定存在. 对于离散贝叶斯网络,Meek[2]得到非忠实分布(unfaithful distribution)的勒贝格测度为0,可见对离散型贝叶斯网络,忠实分布不但存在,而且很多. 由于图上的分布要么是忠实的,要么是非忠实的,所以探讨非忠实分布的构成依然有利于贝叶斯网络的理论研究和应用研究. 正如[0,1]上的全体有理数的勒贝格测度为0,无理数的测度为1,即使如此有理数在数域仍然扮演了重要的角色. 同时贝叶斯网络的学习与逼近忠实成非忠实的分布关系密切[1],因此研究非忠实性分布有利于从数据中学习贝叶斯网络. 近年来关于贝叶斯网络的理论和应用研究非常活跃,可参考文献[4,7-8,10],特别是文献[10]综述了贝叶斯网络扩展研

收稿日期:2009-05-07.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60574075).
通信作者:杨有龙. E-mail: ylyang@mail.xidian.edu.cn.

究的方方面面，文献[7-8]将贝叶斯网络和核方相结合，研究了基于图表模型的数据分类理论，文献[4]将贝叶斯网络和粗糙体相结合，研究了数据特征提取问题.

本文针对布尔域上的贝叶斯网络，提出了贝叶斯网络上分布延拓的概念，得出忠实分布与非忠实分布的平凡延拓均是非忠实分布. 本文接下来的一节是基本概念和术语；第 2 节是本文的主要结论；第 3 节是本文的总结.

1 背景知识

本节介绍一些基本概念和术语[1,6]. 详细内容可参考文献[6].

定义 1 马尔可夫条件. 设 $G=(V,E)$ 是一有向非循环图. P 是定义在随机变量集 V 上的联合概率分布. 如果对于每一个变量 $X\in Y$，它的所有父节点组成的集合 PA_X 给定时，$\{X\}$ 独立于它的所有非子孙节点 ND_X，那么称 $G=(V,E)$ 满足马尔可夫条件 (Markov condition).

定义 2 贝叶斯网络. 设 $G=(V,E)$ 是一有向非循环图，P 是定义在随机变量集 V 上的联合概率分布，而且 (G,P) 满足马尔可夫条件，那么称 $B=(V,E,P)$ 为贝叶斯网络.

显然，给定贝叶斯网络 B 的结构 $G=(V,E)$ 时，G 上的分布构成一个集合 $\mathscr{P}$. 由于贝叶斯网络 B 上的分布正是指其结构 G 上的分布，即 $B=(V,E,P)$ 同样表示一个贝叶斯网络，它的结构图为 $G=(V,E)$，G 上的分布 $P\in\mathscr{P}$，因此本文中 $B=(V,E,P)$ 与 $B=(V,E,\mathscr{P})$ 不加区别，或通过上下文理解，由于贝叶斯网络 $B=(V,E,P)$ 满足马尔可夫条件，所以

$$P(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}P(\{X_i\}\mid PA_i).$$

式中：$V=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，PA_i 表示 X_i 的父节点构成的集合. 对于有向非循环图 $G=(V,E)$，如果存在节点集 $\{X_{r1},X_{r2},\cdots,X_{rk}\}$，$rk\geqslant 2$，使得 $(X_{ri},X_{ri+1})\in E$ 或 $(X_{ri+1},X_{ri})\in E$，其中 $2\leqslant i\leqslant k$，那么称连接这 k 个节点的边集为从 X_{r1} 到 X_{rk} 的一条链，表示为 $L_{X_{r1}X_{rk}}=[X_{r1},X_{r2},\cdots,X_{rk}]$.

定义 3 激活路. 设 $G=(V,E)$ 是一有向非循环图，变量 $X,Y\in V$ 和变量集 $\boldsymbol{Z}\subseteq V$，若接连 X 和 Y 的一条链 $L_{XY}=[X,X_{r1},X_{r2},\cdots,X_{rk},Y]$ 的内部变量 X_{ri} $(1\leqslant i\leqslant k)$ 满足以下条件：1) X_{ri} 是头对头 $(\rightarrow X_{ri}\leftarrow)$ 连接时，X_{ri} 属于 Z 或者它的某一个子孙节点属于 Z；2) X_{ri} 不是头对头连接时，X_{ri} 不属于 $\boldsymbol{Z}$. 则称链 L_{XY} 是给定变量集 $\boldsymbol{Z}$ 时的激活路 (Active path).

$I_G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$ 表示给定变量集 $\boldsymbol{Z}$ 时，变量集 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 中任何 2 个变量之间不存在激活路，即称给定变量集 $\boldsymbol{Z}$ 时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ d-可分(或 d-分割). 非 d-可分表示为 $\neg I_G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$. $I_P(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$ 表示给定变量集 $\boldsymbol{Z}$，变量集 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 独立，即 $P(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})=P(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})$，不独立表示为 $\neg I_P(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$. 对于分布 P，如果由 $I_G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$ 可得到 $I_P(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$，则称有向非循环图 $G=(V,E)$ 上的分布 P 是马尔可夫分布 (Markov distribution). 反之，如果由 $I_P(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$ 可得到 $I_G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$，则称 P 是定义在有向非循环图 G 上的完美分布 (perfect distribution). 对于满足马尔可夫条件的贝叶斯网络 $B=(G,V)$，由文献[6]知当 $I_G[\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z}]$ 成立时，必有 $I_P(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})$ 成立. 由于文献[2]已证得非忠实分布的测度为 0，所以在研究贝斯网络的结构学习和推理时，总假定 BN 上的分布满足忠实性.

2 主要结论及证明

设离散型贝叶斯网络 $B=(V,E,P)$ 上的变量集按拓扑序标注为 $V=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，即变量(或称节点、顶点) X_i 在 G 中的父节点集 $PA_i\subseteq\{X_1,X_2,\cdots,X_{i-1}\}$，记 $m_i=|PA_i|$ 表示 X_i 父亲节点的数量. 当所有变量的取值范围为 $X_i\in\{0,1\}$ 时，称 B 为布尔域上的贝叶斯网络. 本文只考虑布尔域上的贝叶斯网络，因此可利用 m_i 维向量集 $\prod_i=\{0,1\}^{m_i}=\{\alpha\mid\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m_i}),\alpha_k\in\{0,1\},1\leqslant k\leqslant m_i\}$ 表示 X_i 的父节点集 PA_i 的取值情况. 例如当 $PA_i=\{X_{i1},X_{i2},X_{i3},X_{i4},X_{i5}\}$，$\alpha=(0,1,1,1,0)$ 时，表示 X_i 有 5 个父节点，而且 $PA_i=\alpha$ 表示第一、五个父节点取 0，其他 3 个节点取 1，此时 X_i 取值的概率参数可表示为 $p_{i,\alpha}=p(X_i=1\mid PA_i=\alpha)$ 和 $1-p_{i,\alpha}=p(X_i=0|PA_i=\alpha)$，其中 $p_{i,\alpha}$ 表示在分布 P 中 X_i 的父节点集 $PA_i=\alpha$ 时，X_i 取 1 的概率.

令 B_0 表示无连接边的贝叶斯网络，即 $B_0=(G_0,P)$、$G_0=(V,E_0)$ 且 $E_0=\phi$，那么对于任意的变量 $X,Y\in V$ 及 $\boldsymbol{Z}\subset V$，因为不存在连接 X 和 Y 的链，当然无激活路，所以 $I_G(X;Y|\boldsymbol{Z})$ 成立，从而 $I_P(X;Y|\boldsymbol{Z})$ 成立. 因此对于 B_0 而言，它的分布一定是忠实分布.

性质 1 贝叶斯网络 B_0 上的任何分布均是忠实分布.

显然 B_0 上的分布和它的结构图完美匹配，当给 B_0 增加有向边，同时将它的分布进行扩充，那么所得的结构图与分布关系如何？下面首先定义分布的扩充，即分布的延拓.

定义 4 分布的延拓和限制. 设布尔域上的贝叶斯网络 $B_1=(V,E_1,\mathscr{P}_1)$、$B_2=(V,E_2,\mathscr{P}_2)$，且 $E_1\subseteq$

E_2,其中变量集为 $V=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 设 $P_1\in\mathscr{P}_1$, $P_2\in\mathscr{P}_2$,变量 $X_i\in V$ 在 B_1、B_2 中的父节点集分别为 PA_i^1 和 PA_i^2,显然 $PA_i^1\subseteq PA_i^2$,不妨设 $PA_i^1=\{X_{i1}^1,\cdots,X_{ik}^1\}$ 和 $PA_i^2=\{X_{i1}^1,\cdots,X_{ik}^1,\cdots,X_{ir}^1\}$,其中 $k=m_i^1$、$r=m_i^2$. 如果对于任意的参数 $p_{i,\alpha}^1\in P_1,\alpha\in\{0,1\}^k$,存在参数 $p_{i,\alpha}^2\in P_2,\beta\in\{0,1\}^r$,使得 $\beta=(\alpha,\gamma)$,其中 $\gamma\in\{0,1\}^{r-k}$,使得 $p_{i,\alpha}^1=p_{i,\gamma}^2$,则称分布 P_2 是分布 P_1 在 B_2 上的延拓,分布 P_1 是分布 P_2 在 B_1 上的限制. 若对任意的 $\gamma\in\{0,1\}^{r-k}$,有 $p_{i,\beta}^2=p_{i,\alpha}^1$,其中 $\beta=(\alpha,\gamma)$,则称分布 P_2 是分布 P_1 在 B_2 上的平凡延拓.

引理 1　设 $B=(V,E,\mathscr{P})$ 是布尔域上不同于 $B_0=(V,E_0,\mathscr{P}_0)$ 的贝叶斯网络,那么存在分布 $P\in\mathscr{P}$,使得 P 是 B 上的非忠实分布.

证明　因为 $E_0\subset E$,不妨设 $P_0\in\mathscr{P}_0$,以及 $P\in\mathscr{P}$ 是分布 P_0 在 B 上的平凡延拓,下面证明 P 是 B 上的非忠实性分布. 由于 $E_0\subset E$,所以存在 $(X_i,X_j)\in E$ 且对任意 $k\leqslant j-1$,$PA_k=\phi$ 以及 $PA_j\subseteq\{X_i,X_{i+1},\cdots,X_{j-1}\}$,于是 $\urcorner I_G(X_i,X_j|\phi)$. 可见要证明 P 是 B 上的非忠实性分布,仅需证 $I_P(X_i,X_j|\phi)$ 成立,即 B 上的分布 P 诱导出变量 X_i 和 X_j 独立. 因为

$$P(X_j\mid X_i)=\frac{\sum\limits_{X_k\neq X_i,X_j}P(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{P(X_i)}=$$

$$\frac{\sum\limits_{X_k\neq X_i,X_j}P(X_1)P(X_2)\cdots P(X_j-1)P(X_j\mid PA_j)}{P_0(X_i)}=$$

$$\frac{\sum\limits_{X_k\neq X_i,X_j}P_0(X_1)P_0(X_2)\cdots P_0(X_j-1)P_0(X_j\mid PA_j)}{P_0(X_i)}=$$

$$\frac{P_0(X_i)P_0(X_j)}{P_0(X_i)}=P_0(X_j)=P(X_j).$$

所以在贝叶斯网络 B 上由 $I_p(X_i,X_j|\phi)$ 不能推出 $I_G(X_i,X_j|\phi)$. QED.

引理 2　设贝叶斯网络 $B_1=(V,E_1,\mathscr{P}_1)$、$B_2=(V,E_2,\mathscr{P}_2)$ 且 $E_1\subseteq E_2$,如果 $P\in\mathscr{P}_1$ 是 B_1 上的非忠实分布,那么 P_1 在 B_2 上的平凡延拓分布 $P_2\in\mathscr{P}_1$ 是 B_2 上的非忠实分布.

证明　由于 P_1 是 B_1 上的非忠实分布,所以存在 $X_i,X_j\in V$ 及 $\mathbf{Z}\subseteq V$ 使得 $I_{P_1}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 和 $\urcorner I_{G_1}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立. 下面证明 $I_{P_2}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 和 $\urcorner I_{G_2}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立.

首先证 $\urcorner I_{G_2}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立. 由 $\urcorner I_{G_1}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立可知,给定变量集 $\mathbf{Z}$ 时,在结构图 $DAGG_1=(V,E_1)$ 中存在激活路 $\pi=[X_i,X_{l1},\cdots,X_{1r},X_j]$;又有 $G_2=(V,E_2)$ 可知,在不改变变量原有拓扑序的同时 $(V=(X_1,X_2,\cdots,X_n))$,通过增加某些变量的父节点,可由边集 E_1 得到 E_2. 因此给定变量子集 $\mathbf{Z}$ 时,在 $DAGG_2=(V,E_2)$ 中链 $\pi=[X_i,X_{l1},\cdots,X_{1r},X_j]$ 依然激活. 故 $\urcorner I_{G_2}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立.

其次证 $\urcorner I_{P_2}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立. 因为

$$P_2(X_j\mid X_i,\mathbf{Z})=\frac{P_2(X_i,X_j,\mathbf{Z})}{P_2(X_i,\mathbf{Z})}=$$

$$\frac{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}\cup\{X_i,X_j\}}(\prod_{k=1}^{n}P_2(X_k\mid PA_k^2))}{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}\cup\{X_i\}}(\prod_{k=1}^{n}P_2(X_k\mid PA_k^2))}=$$

$$\frac{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}\cup\{X_i,X_j\}}(\prod_{k=1}^{n}P_1(X_k\mid PA_k^1))}{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}\cup\{X_i\}}(\prod_{k=1}^{n}P_1(X_k\mid PA_k^1))}=$$

$$\frac{P_1(X_i,X_j,Z)}{P_1(X_i,Z)}=P_1(X_i\mid X_j,\mathbf{Z})=$$

$$P_1(X_i\mid\mathbf{Z})=\frac{P_1(X_j,\mathbf{Z})}{P_1(\mathbf{Z})}=$$

$$\frac{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}\cup\{X_j\}}(\prod_{k=1}^{n}P_1(X_k\mid PA_k^1))}{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}}(\prod_{k=1}^{n}P_1(X_k\mid PA_k^1))}=$$

$$\frac{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}\cup\{X_j\}}(\prod_{k=1}^{n}P_2(X_k\mid PA_k^2))}{\sum_{X_k\in V-\mathbf{Z}}(\prod_{k=1}^{n}P_2(X_k\mid PA_k^2))}=$$

$$\frac{P_2(X_j,\mathbf{Z})}{P_2(\mathbf{Z})}=P_2(X_j\mid\mathbf{Z}),$$

所以 $\urcorner I_{P_2}(X_i,X_j|\mathbf{Z})$ 成立. QED.

由上述定理可知,分布的平凡延拓保持了非忠实性,那么分布的平凡延拓是否保持了忠实性? 一方面,由上述定理的证明可知分布的平凡延拓保持 了变量的独立关系,另一方面,边集的增加产生新的激活路,难以保持变量之间的 d-可分性,所以分布的平凡延拓不能保持分布的忠实性. 因此有以下结论.

引理 3　设有向非循环图 $G=(V,E)$,其中节点集 V 按祖先序为 $V=\{X_1,\cdots,X_n\}$,若不相邻节点 $X_i,X_j\in V$ 且 $i<j$,那么 $I_G(X_i,X_j|PA_j)$ 成立.

证明　假设给定变量 X_j 的父节点集 PA_j 时,X_i 和 X_j 之间存在激活路 ϕ:

$$X_i-X_{i1}-X_{i2}-\cdots-X_{ik}-X_j,$$

那么,$X_{ik}\notin PA_j$,否则 π 不是激活路. 可见在 G 中 X_j 和 X_{ik} 的连接边方向为 $X_j\to X_{ik}$,不失一般性不妨设 X_{ir} 是在激活路 π 中最靠近 X_j 的头对头节点,即激活路 π 为

$$X_i-X_{i1}-\cdots-X_{i(r-1)}\to X_{ir}\leftarrow\cdots\leftarrow X_{ik}\leftarrow X_j.$$

由于 $i<j$,所以 $X_{ir}\neq X_j$. 根据激活路的定义,可知 $X_{ir}\in PA_j$ 或者 X_{ir} 的一个子孙节点属 PA_j,于是在有向非循环图 G 中出现循环,产生矛盾,因此给定

变量 X_j 的父节点集 PA_j 时, X_i 和 X_j 之间不存在激活路, 即 $I_G(X_i, X_j | PA_j)$ 成立.

引理 4　设贝叶斯网络 $B_1 = (V, E_1, \mathscr{P}_1)$、$B_2 = (V, E_2, \mathscr{P}_2)$ 且 $E_1 \subset E_2$, 如果 $P \in \mathscr{P}_1$ 是 B_1 上的忠实分布, 那么 P_1 在 B_2 上的平凡延拓分布 $P_2 \in \mathscr{P}_1$ 是 B_2 上的非忠实分布.

证明　由于 $E_1 \subset E_2$, 所以存在节点 $X_i \in V$ 使得 $X_i \notin PA_j^1$ 及 $X_i \in PA_j^2$, 即 $(X_i, X_j) \notin E_1$, $(X_i, X_j) \in E_2$. 由于 X_i 和 X_j 在 B_1 中不相邻以及 $i < j$, 根据引理 3 可知 $I_{G_1}(X_i, X_j | PA_j^1)$ 成立, 于是得 $I_{P_1}(X_i, X_j | PA_j^1)$. 再利用引理 2 的第 2 部分证明可得 $I_{P_2}(X_i, X_j | PA_j^1)$. 显然根据 X_i 和 X_j 中的相邻性可得 $I_{G_2}(X_i, X_j | PA_j^1)$ 不成立. 因此分布 P_2 是 B_2 上的非忠实分布. QED.

定理 1　设贝叶斯网络 $B_1 = (V, E_1, \mathscr{P}_1)$、$B_2 = (V, E_2, \mathscr{P}_2)$、$E_1 \subseteq E_2$ 以及 $P \in \mathscr{P}_1$, 那么 P_1 在 B_2 上的平凡延拓分布 $P_2 \in \mathscr{P}_2$ 是 B_2 上的非忠实分布.

证明　根据上述引理 2 和引理 4 可得定理 1 成立.

从上述定理可知, 通过概率分布的平凡延拓获得贝叶斯网络上的非忠实分布, 因此对于给定贝叶斯网络, 容易获得它的非忠实分布. 自然想到另一个问题: 是否存在保持非忠实性的非平凡延拓分布? 显然存在, 首先将非忠实性的分布平凡延拓, 其次改变平凡延拓为非平凡延拓即可.

3　结束语

研究贝叶斯网路的分布是否忠实, 有利探讨 BN 的学习和推理. 本文针对布尔域上的贝叶斯网路, 通过定义概率分布的延拓, 得到任何分布的平凡延拓均是非忠实分布, 因此对于给定的贝叶斯网路, 容易获得它的非忠实分布. 进一步可以探讨哪类贝叶斯网络的非忠实分布一定来自于这种分布的平凡延拓, 或者哪一类贝叶斯网络的非忠实分布并不是来源于这种分布的平凡延拓以及如何构造, 这些基本问题的深入探讨一定会促进贝叶斯网络的理论和应用研究.

参考文献:

[1] CHICKERING D M, MEEK C. On the incompatibility of faithfulness and monotone DAG faith-fulness[J]. Artificial Inteligence, 2006, 170(8): 653-666.

[2] MEEK C. Strong completeness and faithfulness in Bayesian networks[C]//Proceedings of the Eleventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann, San Mateo, USA, 1995: 411-418.

[3] LEVITZ M, PERLMAN M D, MADIGAN D. Separation and completeness properties for ampchain graph Markov [J]. The Annals of Statistics, 2001, 29(6): 1751-1784.

[4] SLEZAK D. Degrees of conditional (in) dependence: a framework for approximate Bayesian networks and examples related to the rough set-based feature selection[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 197-209.

[5] SETTIMI R, SMITH J Q. Geometry, moments and conditional independence trees with hidden variables[J]. The Annals of Statistics, 2000, 28(4): 1179-1205.

[6] RICHARD E. Neapolitan. Learning Bayesian networks [M]. [S. l.]: Prentice Hall, 2003: 102-107.

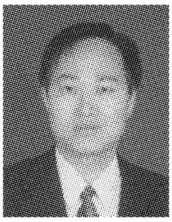
[7] YANG Youlong, WU Yan. Inner product space and concept classes induced by Bayesian networks[J]. Acta Application Mathematicae, 2009, 106(3): 337-348.

[8] YANG Youlong, WU Yan. VC dimension and inner product space induced by Bayesian networks[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50(7): 1036-1045.

[9] 杨有龙, 高晓光. 基于 BD 度量的局部网络结构分析[J]. 模式识别与人工智能, 2003, 16(1): 17-21.
YANG Youlong, GAO Xiaoguang. Analysis of structure of local networks based on the Bayesian dirichlet metric[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2003, 16(1): 17-21.

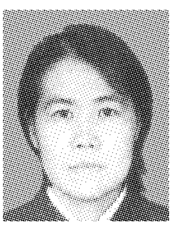
[10] 陈英武, 高研方. 贝叶斯网络扩展研究综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1081-1086, 1091.
CHEN Yingwu, GAO Yanfang. Survey of extended Bayesian networks[J]. Control and Decision, 2008, 23(10): 1081-1086, 1091.

作者简介:



杨有龙, 男, 1967 年生, 博士, 教授, 硕士生导师, 现为陕西省数学会理事, 主要研究方向为图形模型、数据分类和智能优化等, 参加的科研项目荣获 2005 年度陕西省科学技术奖二等奖; 2005 年陕西高等学校科学技术奖一等奖; 2008 年陕西高等学校科学技术奖二等奖. 发表学术论文 30 余篇.

刘　蔚, 女, 1986 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为数据融合和贝叶斯网络.



吴　艳, 女, 1969 年生, 副教授, 主要研究方向为图形模型、选址问题及优化理论.