第 3卷第 4期 智 能 系 统 学 报 Vol 3 № 4
2008年 8月 CAAI Transactions on Intelligent Systems Aug 2008

量子博弈:新方法与新策略

王 龙[1,2],王 靖[1,2],武 斌[1,2]
(1. 北京大学 工学院,北京 100871; 2. 北京大学 机器感知与智能教育部重点实验室,北京 100871)

摘 要:论述了量子博弈的研究现状和最新进展. 首先介绍了量子博弈中的一些基本概念和主要模型,即量子翻硬币模型、Eisert量子博弈模型和量子 Monty Hall模型;然后以这些模型为基础,讨论了当前量子博弈研究中的热点问题:多人量子博弈、状态纠缠、进化稳定策略和平衡态、退相干性等;最后,对量子博弈的未来发展方向做了一些展望.

关键词:博弈;量子博弈;量子信息;策略;平衡态
中图分类号: TP18 **文献标识码**: A **文章编号**: 1673-4785(2008)04-0294-11

Quantum games: new methodologies and strategies

WANG Long[1,2], WANG Jing[1,2], WU Bin[1,2]
(1. Center for Systems and Control, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China; 2. Key Laboratory of Machine Perception (Ministry of Education), Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The current status of quantum games, including recent developments, is presented in this paper. First, some basic concepts and models in quantum games are introduced, including the penny flipping model, the Eisert model and the Monty Hall model. On the basis of these models, some current key problems in quantum games are discussed, including those involving multiplayer games, state entanglement, evolutionarily stable strategies, Nash equilibrium, decoherence, etc. Finally, some future research directions in quantum games are pointed out.

Keywords: games; quantum games; quantum information; strategy; equilibrium

博弈论,又称对策论,是研究具有斗争或竞争性现象的理论和方法. 它既是现代数学的一个分支,也是经济学的一个重要研究领域. 博弈思想由来已久,但现代博弈论一般认为起源于数学家 Von Neumann和经济学家 Morgenstern合著的《博弈理论和经济行为》[1]. 此后,经过许多学者的努力,特别是Nash在非合作博弈理论中的贡献,博弈论日渐成为重要的理论分析工具.

量子博弈是以量子信息论为工具研究博弈论的一门交叉学科. 由于大量的量子力学试验都可以用博弈论的语言重新组织,故可认为量子博弈在量子力学发展的初期就已经存在了. 但"量子博弈"这一概念被明确提出来是近 20年的事. 1999年, Eisert等人和 Meyer分别对囚徒困境[2]和翻硬币问题[3]进行了量子化处理,成功地解决了经典博弈论所不能解决的问题. 此后,量子博弈作为独立的研究方向受到了越来越多的关注,并被广泛应用于经济学[4-43]、生物学[17-20]、信息科学[21-23]等诸多领域.

经典博弈中有基于概率论的混合策略的概念,而量子力学则是物理学家发明的一种基于概率论的认识世界的方法,是量子世界强有力的描述工具. 爱因斯坦称量子力学是科学中真正的巫术. 当物理学

收稿日期: 2008-05-29.
基金项目:国家自然科学基金资助项目 (60674050, 60528007).
通信作者:王 龙. E-mail: longwang@pku. edu. cn.

家将这个“巫术”应用于博弈论时,发现它对于博弈的描述要优于经典博弈. 这种优越性主要基于量子化博弈扩大了原经典博弈的策略集以及纠缠态的引入. 策略集的扩大使得寻找满足条件的策略更加容易实现;而纠缠态的引入从一定程度修正了“个体都是理性的”这一基本经典假设,互相纠缠的状态成为博弈个体之间相互“关照”程度的度量,正如人群中的亲友之间进行博弈时,会把对方的收益部分当作自己收益一样[24]. 事实上,博弈论作为研究理性策略主体如何解决冲突的理论,本身就蕴含着经典描述所无法满足的复杂性,如博弈个体的声誉,博弈个体之间的网络结构等对博弈结果的影响[24]. 而在量子信息论框架下产生的量子博弈论,由于存在量子态的相干叠加和纠缠,往往能够解决一些经典博弈论所不能解决的难题,如经典的囚徒困境博弈在量子博弈的框架下就能摆脱困境. 同时,量子力学对现实世界的描述语言和相关概念,也为博弈论提供了新的研究课题,如量子“纠缠态”对博弈结果的影响[25],量子噪声对博弈的影响[26-27]等. 量子博弈还为量子计算提供了良好的实现平台[28],对量子计算机的研究起了巨大的推动作用.

1　预备知识

1.1　博弈论

现对二人 n策略博弈进行定义:设有 2个个体 (player) Alice和 Bob, 且 2个体有公共的备选策略集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. 当 Alice选择策略 s_i, Bob选择策略 s_j时, Alice的收益是 a_{ij}. 一般地,设博弈是公平的,即当 Bob选择策略 s_i, Alice选择策略 s_j时, Bob的收益也是 a_{ij};另一方面,设博弈个体是理性的,即个体总以达到自我利益最大化为目的. $n\times n$矩阵 $A=(a_{ij})$称为收益矩阵 (payoff matrix).

一个经典的例子就是囚徒困境 (prisoner's dilemma)博弈: 2个嫌疑犯作案后被警察抓住,进行隔离审讯. 警方的政策是“坦白从宽,抗拒从严”. 策略 C表示与同伴合作,即对警察抵赖;策略 D表示背叛同伴,即对警察坦白. 如果 2人互相合作 (即都对警察抵赖),则因证据不足各判 2年;如果一人合作另一人背叛 (即一人对警察抵赖,另一人坦白),合作的判 5年,背叛的释放;如果双方都背叛 (即都对警察坦白),则各判 4年. 这个博弈的收益矩阵为

$$\begin{array}{ccc} & C & D \\ C & -2 & -5 \\ D & 0 & -4 \end{array}$$

在大多数文献中,为了讨论方便,不失一般性,将收益矩阵中的每一项加 5,使收益矩阵成为非负矩阵:

$$\begin{array}{ccc} & C & D \\ C & 3 & 0 \\ D & 5 & 1 \end{array}$$

进一步地,称 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$为纯策略集,其中的每个元素称为纯策略. 用 p_i表示个体使用纯策略 s_i的概率,称 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$为一个混合策略. 混合策略集可以表示为

$$S=\{p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)\in R^n: p_i\geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i=1\}.$$

若 Alice选择混合策略 q_a, Bob选择混合策略 q_b,则 Alice的收益可以表示为 $q_a A q_b^{\mathrm{T}}$.

Alice的占优策略 q_a,是指对于 Bob的任意策略选择 q_b', Alice其他非 q_a的策略选择获得的收益都不会大于占优策略 q_a的所得,即

$$q_a A q_b'^{\mathrm{T}} \geq q_a' A q_b'^{\mathrm{T}}, \ \forall q_a', q_b' \in S.$$

类似地,可以定义 Bob的占优策略.

Nash均衡 (Nash equilibrium),是指在博弈中其他个体的策略给定时,任何个体都不能单方面改变自己的策略来增加自己收益的情形. 即如果 $qAq_e^{\mathrm{T}}\leq q_e A q_e^{\mathrm{T}}, \forall q\in S$,则 $q_e\in S$被称为 Nash均衡. 对于囚徒困境来说,双方互相背叛是一个 Nash均衡. 但如果双方互相合作,则他们可以获得的收益之和最大. 因此,在囚徒困境博弈中,对整体有利的策略并不是理性个体最终选择的策略. 2个囚徒也因此陷入“为大家考虑”和“为自己考虑”的困境中.

当博弈双方的策略组合是 (q_a, q_b)时,如果增加任一个体的收益就必须以降低另一个体的收益为代价,则称 (q_a, q_b)是一个 Pareto最优. 在囚徒困境博弈中,双方都合作是一个 Pareto最优.

1.2 量子力学

1.2.1 量子力学的基本假设

量子力学有 2套相互等价的描述方法:状态空间法和密度算子法.这里的叙述采用密度算子法[29].

假设 1 任意孤立的物理系统与称之为这个系统的状态空间相关联,它是一个 Hilbert空间.系统由作用在状态空间上的密度算子完全描述,密度算子 ρ是一个半正定、迹为 1的线性算子.如果量子系统以概率 p_i 处于状态 ρ_i,则系统的密度算子为 $\sum_i p_i\rho_i$.

假设 2 封闭量子系统的演化由一个酉变换来描述,即系统在时刻 t_1 的状态 ρ和在时刻 t_2 的状态 ρ由一个仅依赖于时间 t_1 和 t_2 的酉算子 U联系,

$$\rho' = U\rho U^{\dagger},$$

式中:$U^{\dagger}$表示 U的伴随算子.

假设 3 量子测量是由一组测量算子$\{M_m\}$描述,这些算子作用在所测量的状态空间上,指标 m 指实验中可能出现的测量结果.如果量子系统在测量前的最后状态是 ρ,则得到结果 m 的概率由

$$p(m) = \mathrm{tr}(M_m^{\dagger}M_m\rho)$$

给出,其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$是线性代数中的迹函数,且测量后系统的状态为

$$\frac{M_m\rho M_m^{\dagger}}{\mathrm{tr}(M_m^{\dagger}M_m\rho)}.$$

测量算子满足完备性方程:

$$\sum_m M_m^{\dagger}M_m = I$$

假设 4 复合物理系统的状态空间为各子物理系统状态空间的张量积,如果有系统 1到 n,其中系统 i处于状态 ρ_i,则复合物理系统的状态是 $\rho_1\otimes\rho_2\otimes\cdots\otimes\rho_n$.

此外,对于开放的物理系统,系统演化不再遵守酉变换法则,但仍可用 Kraus算子来描述系统的演化,即用一组满足完备性方程的算子来描述系统的演化.

1.2.2 纠缠态

如果一个复合物理系统的某个状态的密度矩阵不能表示成各个子系统的密度矩阵的张量积的线性和形式,则称这个复合系统处于纠缠态.量子纠缠是量子力学的奇妙特性之一,是量子博弈优于经典博弈的一个重要原因.

1.3 量子信息论

比特是经典信息论的基本概念.类似地,量子信息和量子计算是建立在量子比特(quantum bit或 qubit)的基础上.经典比特有 2个确定状态 0和 1,量子比特有 2个可能状态 $|0\rangle$和 $|1\rangle$,其中“$|\cdot\rangle$”称为 Dirac符号,在量子力学中表示状态(这种用 Dirac符号表示的方法就是上面提到的状态空间法).一般地,量子比特的状态 $|\psi\rangle$落在以 $|0\rangle$和 $|1\rangle$作为标准正交基所张成的复数域上的二维内积空间的单位球面上.即 $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$, $\alpha,\beta\in C$, $\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}=1$.事实上, $|\psi\rangle\langle\psi|$就是一个密度算子,表示量子比特以概率 1处于状态 $|\psi\rangle$,其中 $\langle\psi|$表示 $|\psi\rangle$的对偶向量.

经典计算机线路由连线和逻辑门构成,其中逻辑门负责处理信息,把信息从一种形式转化为另一种形式.类似地,可以定义单量子比特门.按照量子力学的假设 2,单量子比特门作为状态之间变换的惟一限制是酉性,因此全体二维酉矩阵组成了所有的单量子比特门.如同经典比特门中有一些简单而重要的成员,如与非门、或非门,单量子比特门也有一些重要的成员,它们可以作为一般单量子比特门(酉变换)分解的基本元素,如:

$$\text{Hadamard门}: H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\text{Pauli—}X\text{门}: \sigma_X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\text{Pauli—}Y\text{门}: \sigma_Y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},$$

$$\text{Pauli—}Z\text{门}: \sigma_Z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

有了以上的准备知识,就可以二人双策略公平博弈为例来介绍量子博弈及其相关概念.

1.4 量子博弈

设 S是一个单量子比特门的子集, Alice和 Bob的策略都取自 S.类似于经典博弈,量子博弈中也有 Nash均衡、Alice的占优策略和 Pareto最优的概念.这些概念与经典博弈中的直观意义是相同的,例如

$s_A \in S$称为 Alice的占优策略,是指对于任意 Bob的策略选择 s_B', Alice其他非 s_A 的策略选择获得的收益都不大于占优策略的所得,即: $P_A(s_A, s_B') \geq P_A(s_A', s_B')$, $\forall s_A', s_B' \in S$.

$\forall s_A', s_B' \in S$,如果

$$P_A(s_A, s_B) \geq P_A(s_A', s_B),$$

$$P_B(s_A, s_B) \geq P_B(s_A, s_B').$$

则量子策略$(s_A, s_B) \in S \times S$称为一个 Nash均衡,其中 $P_A(s_A, s_B)$, $P_B(s_A, s_B)$分别表示 Alice选用 s_A, Bob选用 s_B 时, Alice和 Bob的收益.

2 量子博弈的主要模型

2.1 量子翻硬币博弈

最简单的赌博形式就是翻硬币. 在量子翻硬币博弈中[3],假设有 2个玩家 P和 Q,其中 P使用的是经典策略,即翻硬币和不翻硬币,而 Q使用量子策略. 游戏规则如下:首先由 P准备一枚硬币,硬币正面是头像,反面是字. P把这枚硬币放到一个盒子里,确保硬币头像一面向上,然后把盒子盖上(P和 Q只能把手伸到盒子里进行操作,但看不到盒子里硬币的状态). 接下来由 Q进行操作,然后是 P操作,最后 Q再进行一次操作之后,把盒子打开. 如果硬币的头像一面仍然向上的话 Q赢,否则 P赢.

定义一个二维向量空间来表示硬币的状态,这个空间的 2个基为 $|0\rangle$和 $|1\rangle$. 状态 $|0\rangle$, $|1\rangle$分别表示以概率 1硬币头像面向上,以概率 1硬币头像面向下. 定义二维矩阵来表示玩家的策略. 对于玩家 P,经典策略翻(F)和不翻(N)分别表示为

$$F:\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N:\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

玩家 P以概率 p使用策略 F,以概率 $1-p$使用策略 N,则 P的混合策略可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

而玩家 Q使用的量子策略为 Hadamard算子:

$$U:\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

使用密度算子法[29],定义硬币初始的密度算子为 $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$. 经玩家 Q作用之后的密度算子为 $\rho_1 = U\rho_0 U^\dagger$,其中 $U^\dagger$是酉算子 U的共轭转置,并且满足 $UU^\dagger = I$. 玩家 P作用之后,硬币的密度算子为 $\rho_2 = pF\rho_1 F^\dagger + (1-p)N\rho_1 N^\dagger$. 最后,硬币的密度算子为 $\rho_3 = U\rho_2 U^\dagger = \rho_0$. 因此,不管玩家 P以多大概率翻硬币,使用策略 U的玩家 Q会以概率 1赢.

事实上,经典博弈论中的策略是量子策略的一个子集[30],因此,量子策略相对于经典策略具有一定的优越性.

2.2 Eisert量子博弈

Eisert量子博弈[2]是把量子力学的概念引入经典的囚徒困境而产生的一个全新的博弈模型. 在经典的囚徒困境博弈中,理性假设必然导致策略主体双方都选择不合作,从而互相背叛成为一个 Nash均衡. 对任何理性博弈者来说,背叛就是最优选择. 但是如果双方都选择背叛, 2个人的收益和比双方都合作的收益和要小. 这个困境深刻地反映了个人理性和集体理性之间的矛盾. 在量子博弈意义下,囚徒困境有了一个新的 Nash均衡. 如果博弈双方都采用量子策略,那么他们可以逃出以上困境.

Eisert[2]量子博弈模型包括以下 3点:

1) 2个量子比特的源,每个个体的状态对应一个比特;

2) 一个物理工具集(对应于经典博弈的策略集),这些工具可以使策略主体在策略意义下控制自己的比特;

3) 一个物理测量设备,这个设备可以通过这 2个比特的状态来确定策略主体的收益.

假设每个策略主体都知道以上 3点要素. 定义比特 $|C\rangle$和 $|D\rangle$表示经典策略 C和 D的状态. 在静态博弈中,每个策略主体只进行一次动作(即使用一次策略). 那么这个博弈的初始策略组合可以写成 $|CC\rangle$、$|CD\rangle$、$|DC\rangle$、$|DD\rangle$.

Eisert量子博弈的过程如图 1所示. 首先,令 2个策略主体的策略都是 $|C\rangle$,即该博弈的状态为 $|CC\rangle$. 通过量子门 $\hat{J}$使得状态 $|CC\rangle$纠缠在一起形成初始状态 $|\psi_0\rangle = \hat{J}|CC\rangle$,即 2个策略主体的初始状态通过量子信息的通道对对方的决策产生影响,形

成被影响后的纠缠状态. 2个策略主体 A和 B的策略分别为酉算子 $\hat{U}_A$ 和 $\hat{U}_B$. 当 A和 B进行一次博弈之后,状态成为 $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \hat{J}|CC\rangle$,然后通过量子门 $\hat{J}^\dagger$ 来解纠缠,得到最终状态:

$$|\psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger \hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \hat{J}|CC\rangle.$$

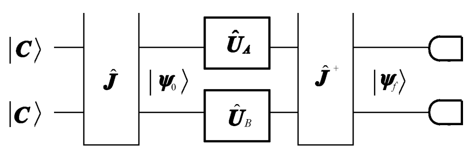


图 1 Eisert量子博弈模型

Fig 1 Eisert model of quantum game

使用经典囚徒困境的收益矩阵 $\begin{bmatrix} r & s \\ t & p \end{bmatrix}$,可以定义策略主体 A的期望收益为

$$\$_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD},$$

式中: $P_{\sigma\sigma'} = |\langle\sigma\sigma'|\psi_f\rangle|^2$,它表示最终状态是 $|\sigma\sigma'\rangle$ 的概率. 策略空间为不同的形式时,可以得到不同的博弈结果[31].

1)策略空间为具有一个参数的 2阶酉矩阵:

$$\hat{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

式中: $\theta\in[0,\pi]$. 在这种情况下,互相背叛仍然是惟一的 Nash均衡,但不是 Pareto最优. 即在这种最优策略组合下,任何一个策略主体都不能以减少对方收益为代价来增加自己的收益. 此时,量子博弈和经典博弈没有区别;

2)策略空间为具有 2个参数的 2阶酉矩阵

$$\hat{U}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} e^{i\phi}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & e^{-i\phi}\cos(\theta/2) \end{bmatrix},$$

式中: $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in[0,\pi/2]$.

在这种情况下,存在一个量子策略:

$$\hat{Q} = \hat{U}(0,\pi/2) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

使得均衡 $(\hat{Q},\hat{Q})$是一个新的 Nash均衡,并且是一个 Pareto最优. 因此,困境在量子策略下消失了;

特别地,当策略集被限制在 $\{\hat{U}(\pi,0), \hat{U}(0,0)\}$时,量子博弈还原为经典博弈,且 $\hat{U}(\pi,0)$, $\hat{U}(0,0)$分别表示背叛与合作,记为 $\hat{D}$和 $\hat{C}$.

3)策略空间为一般的酉矩阵. 在这种情况下,对于任意给定的收益(不大于 Pareto最优时的收益),策略主体可以通过调整各自的量子策略达到一个 Nash均衡,使得在这个 Nash均衡下,2个策略主体的收益都为预先给定的收益.

上述讨论只考虑了策略酉矩阵对收益的影响,并没有考虑初始状态的纠缠所产生的影响. 考虑初始策略组合 $|CC\rangle$经过酉算子 $\hat{J}$纠缠在一起形成纠缠态 $|\Psi_0\rangle = \hat{U}|CC\rangle$的情形[2,28]. 定义 $\hat{J}$的形式为

$$\hat{J} = \exp\{i\gamma \hat{D}\otimes\hat{D}/2\},\ \gamma\in[0,\pi/2],$$

式中: γ是该量子博弈中状态纠缠程度的度量. 若 $\gamma=0$,说明该博弈中的 2个策略主体没有纠缠,进行博弈时完全不受对方的影响. 这种情况下的量子博弈等价于使用混合策略的经典博弈. 若 $\gamma\neq0$,此时的 2个策略主体都不是完全理性,或者不是自私的主体,他们在选择策略时还会考虑对方的因素,所以就会出现纠缠的现象.

纠缠程度也是影响量子博弈的一个重要因素. 以收益矩阵为 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ 的囚徒困境为例:

1)当 $0\le\gamma\le\arcsin\sqrt{1/5}$时, $\hat{D}\otimes\hat{D}$,即双方背叛,仍是惟一的 Nash均衡;

2)当 $\arcsin\sqrt{1/5}<\gamma<\arcsin\sqrt{2/5}$时, $\hat{D}\otimes\hat{Q}$和 $\hat{Q}\otimes\hat{D}$都是 Nash均衡. 此时 $\hat{Q}$仍然为 $\hat{U}(0,\pi/2)$;

3)当 $\arcsin\sqrt{2/5}\le\gamma\le\pi/2$时, $\hat{Q}\otimes\hat{Q}$是惟一的 Nash均衡,并且是 Pareto最优. 此时囚徒困境被解决.

2.3 其他量子博弈模型

量子翻硬币博弈和 Eisert量子博弈是两类非常重要的量子博弈模型. 基于这 2种基本模型,其他一些博弈的量子模型相继产生. 例如,性别之战(battle of sexes game)模型[32-35]、猎鹿博弈(stag hunt game)模型[36]、少数者博弈(minority game)模型[37-38]、伪感应(pseudo telepathy game)模型[39-40]、Monty Hall博弈模型[41-42]以及其他博弈模型[43-59]. 其中量子 Monty Hall博弈模型是比较典型的量子博弈模型.

所谓 Monty Hall问题,就是在一个名为 Monty的大厅中,主人 Alice和客人 Bob进行一次博弈. 主

人 Alice秘密地选择大厅里 3扇门中的一个,并在其后放一件礼物. 客人 Bob随机地站在任意一个门前. 然后 Alice打开除了 Bob所站的门以外的任意一扇没有礼物的门,告知 Bob,那扇她打开的门后没有礼物. 此时 Bob面临着 2个选择:坚持他原来的选择或选择另一扇 Alice未打开的门.

这个博弈初看起来似乎无论 Bob最终如何选择,他都以相同的概率获得礼物. 可事实并非如此. 从表 1可以看出,Bob最好改变他初始的选择,这样更有可能赢得礼物. 因此,博弈的公平性就成了问题. 为了使博弈公平化,即当 Bob在最后无论选取哪一个策略,他都以 1/2的概率赢得礼物,可以引入量子策略来解决这个问题.

表 1　Alice和 Bob可能选择的几种情况

Table 1　Possible choices of Alice and Bob

博弈步骤	奖品所在门					
	1	2	3	1	2	3
Alice打开的门	2或 3	3	2	2或 3	3	2
Bob起初的选择	1	1	1	1	1	1
Bob最后的选择	选择另一扇门			坚持自己原来的选择		
Bob的结果	输	赢	赢	赢	输	输

首先,建立模型. 定义初始状态为 $|\psi_i\rangle = |oba\rangle$,其中 $o, a, b \in H$, H是三维的 Hilbert空间. a表示礼物所在的那扇门的状态, b表示 Bob将选择的门的状态, o表示 Alice将打开的门的状态,系统的末态为 $|\psi_f\rangle = \hat{B}\hat{O}(I\otimes\hat{B}\otimes\hat{A})|\psi_i\rangle$, $\hat{A}$, $\hat{B}$是酉变换,它们分别代表 Alice放礼物和 Bob起初选择门这 2个作用, $\hat{O}$代表开门. $\hat{B}$只能取 2个算子的凸组合,代表 Bob在博弈最后一步时的策略集是由经典的混合策略组成的,其中一个为单位算子,代表保持原来选择;另一个为选择改变,称为跳变算子. 其中跳变算子的求法是很简单的,只要满足是一个酉变换,且限制在经典策略集时与经典模型相容即可. 类似地,可以对 $\hat{O}$进行计算,于是得到下面的结果:

$$\hat{O} = \sum_{ijkl} |\varepsilon_{ijk}| |njk\rangle\langle ljk| + \sum_{jl} |mjj\rangle\langle ljj|,$$

式中:当 $i\neq j\neq k$时 $|\varepsilon_{ijk}| = 1$,其他情况下 $|\varepsilon_{ijk}| = 0$,并且 $m = (j + l + 1)\ (\mathrm{mod}3)$, $n = (i + l)\ (\mathrm{mod}3)$. Bob的跳变算子可以表示为

$$\hat{S} = \sum_{ijkl} |\varepsilon_{ijl}| |ijk\rangle\langle ijk| + \sum_{ij} |iij\rangle\langle iij|.$$

可以看出在 $|\psi_i\rangle = |0ba\rangle$的情况下,当初始状态为纯态(即没有纠缠)时,对于 $|\psi_i\rangle = |0\rangle\otimes\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$且 $\hat{A} = I$, Alice使用的是一个经典的混合策略:等概率地选择任何一扇门,则得到和经典 Monty Hall问题无异的结果:Bob总可以选择改变主意来增加他获得礼物的可能. 然而,当初态选择到最大纠缠状态时, $|\psi_i\rangle = |0\rangle\otimes\frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$,如果取

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3 - i\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} & \frac{1 + i\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} & \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8} & \frac{5 + i\sqrt{7}}{8} \end{bmatrix},$$

则可以证明,不论 $\hat{B}$, $\hat{B}'$如何在它们所在的策略集中取值,结果都是 Bob将以 1/2的概率赢得礼物,这样 Monty Hall问题就得到了解决.

3　量子博弈的近期研究热点

3.1　多人量子博弈

基于 Eisert量子博弈模型, Benjamin等人[60]建立了多人量子博弈模型. 该模型如下:

对于 N个策略主体进行 2种策略选择的博弈,纠缠算子 $\hat{J} = \exp\left[i\frac{\gamma}{2}\hat{\sigma}_x^{\otimes N}\right]$,其中 $\gamma\in[0, \pi/2]$. 当 $\gamma = \frac{\pi}{2}$时,即初始状态处于最大纠缠态时, $\hat{J}$为

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{I}^{\otimes N} + i\hat{\sigma}_x^{\otimes N}),$$

式中: $\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_x^{\otimes N} = \underbrace{\hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x\otimes\cdots\otimes\hat{\sigma}_x}_{N个}$.

基于 Benjamin的多人量子博弈模型, Du研究了 3人囚徒困境问题[61],发现在适当的均衡下,该

博弈的困境可以消除. 同时, Du还发现初始状态的纠缠可以增加策略主体的收益. Chen建立了一个 N 人 M 种策略的量子博弈模型[62],并且发现当初始状态发生纠缠时,该博弈可能没有 Nash均衡存在. Zhou研究了连续变量策略的多人量子博弈模型[63],指出在 N 人量子博弈中,初始状态的纠缠也可以使合作涌现. 可以看出,多人量子博弈的研究是该领域的一个热点[44,61,64-66].

3.2 状态纠缠

从大量的研究工作中,可以看出初态的纠缠在解决量子博弈问题中起到了关键作用. 纠缠把经典世界里看似不相关的各个量综合在一起考虑. 所以,研究一个量子博弈模型,通常都要讨论该模型中初始状态的纠缠对模型性质的影响. Eisert[31]和 Du[28]分别研究了初始状态的纠缠在 Eisert量子博弈模型中的重要作用,指出纠缠因子的取值会影响量子博弈所表现出来的性质. 之后, Du又进一步研究了纠缠态对量子博弈性质的影响[25]. 特别地,对于囚徒困境模型,随着纠缠程度的增大,博弈的"经典"特征转化为"量子"特征.

3.3 进化稳定策略和平衡态

设种群中有 2种策略:原始策略和突变策略. 原始策略称为进化稳定策略 (evolutionarily stable strategy, ESS)[67],是指如果当种群中所有成员都采用这种策略时,在自然选择的作用下,充分小的突变策略将不能侵犯这个种群. ESS和 Nash均衡是博弈论中 2个非常重要的概念. 自然地,在量子博弈论中,有关它们的研究也是一个热点方向[30,68-69].

Iqbal首次研究了量子博弈中的进化稳定策略[70],并发现在对称双矩阵囚徒困境中,一组使用量子策略的突变可能非常容易地入侵一个使用经典 ESS策略的种群. 但是当量子策略的初态未发生纠缠或当纠缠的优势未能得到充分体现时,这组突变不能入侵使用经典 ESS策略的种群. 随后, Iqbal又发现当博弈的形式从"经典"变为"量子"之后,原来 Nash均衡的稳定性也随之改变[71]. 那么,量子博弈对混合 Nash均衡有没有影响呢? 文献[72]给出了一个肯定的回答. Iqbal以量子"石头—剪刀—布"(rock-scissor-paper)模型为例,说明量子策略可以使原本在经典博弈中不稳定的混合 Nash均衡变得稳定[73]. 此外, Iqbal还揭示了纠缠对量子博弈中的进化稳定策略起着决定作用,纠缠的取值可以决定一个策略是否是进化稳定策略[74].

3.4 退相干性 (Decoherence)

量子系统中的退相干过程是由于系统与周围环境的内在联系产生的. 当系统与周围环境或测量仪器相互作用时,退相干现象就会发生,从而导致在实际系统中无相干性的状态. 退相干性的研究在量子信息领域具有重要意义.

考虑两人 Eisert博弈的退相干模型[75] (N 人博弈的退相干模型见[76]). 带有退相干过程的量子信息流如图 2所示.

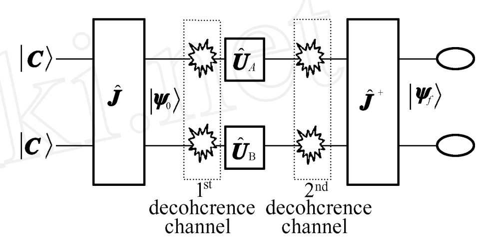


图 2 带有退相干过程的 Eisert模型

Fig 2 Eisert model with decoherence

初始状态用密度算子 $\rho_0 = |\phi\rangle\langle\phi| = \hat{J}|CC\rangle\langle CC|\hat{J}^\dagger$ 来表示. 随后的过程按照图 2所示的信息流流向来进行.

1) 退相干, $\rho_1 = \sum_u M_u \rho_0 M_u^\dagger$;

2) 采用策略, $\rho_0 = (U_A \otimes U_B)\rho_0 (U_A \otimes U_B)^\dagger$;

3) 退相干, $\rho_3 = \sum_u M_u \rho_2 M_u^\dagger$;

4) 解纠缠, $\rho_4 = \hat{J}^\dagger \rho_3 \hat{J}$.

式中: M_u 表示退相干因子. 它的表示形式由选择的信道来决定,并且满足 $\sum_u M_u^\dagger M_u = 1$. 可以选择去极化信道、相衰减信道、振幅衰减信道等.

在去极化信道中, Kraus算子 $m_0 = \sqrt{1-p}\,I$, $m_1 = \sqrt{p/3}\,\sigma_X$, $m_2 = \sqrt{p/3}\,\sigma_Y$, $m_3 = \sqrt{p/3}\,\sigma_Z$, 其中 $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ 是 Pauli阵, 且 $0 \le p \le 1$. 此时 $M_u \equiv M_{ij} = m_i \otimes m_j$.

在相衰减信道中, Kraus算子 $m_0 = \sqrt{1-p}\,I$, $m_1 = \sqrt{p}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $m_2 = \sqrt{p}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

在振幅衰减信道中, Kraus算子:

$$m_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}, m_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

上述 3种信道中出现的参数 p表示加入退相干过程的概率.

如果采用经典囚徒困境中的收益矩阵,可以得到 Alice的收益为

$$\$_A = rP_{CC} + pP_{DD} + tP_{DC} + sP_{CD},$$

式中: $P_{ij} = \mathrm{tr}(\rho_4 \mid i\rangle\langle j\mid)$. 通过画图分析可知,随着概率 p的增加,原来的 Nash均衡不会改变,只是 Alice的收益会减小.

除此之外,有关量子博弈的复制动力学及熵[77-79]、噪声对量子博弈的影响[26-27, 80]、量子博弈的实现[81-83]等方面的研究也是量子博弈中很有意义的研究方向.

4　结论与展望

较之经典的演化博弈而言,量子博弈在非演化情形下,在不加入任何新的机制(如 Nowak提出的亲缘互惠、间接互惠等)的条件下,可以促进双方的收益,使得博弈双方摆脱困境. 然而,并非人人都理解和掌握量子力学,博弈双方的策略选择酉算子这一基本假设还没有被大部分生物学家和社会学家所接受. 因此有必要讨论经典演化博弈促进合作的机制与量子博弈相关量之间的联系或对应关系,进而发掘量子博弈更深层次的生物学与社会学意义. 另外,当前量子博弈的研究主要集中在对封闭量子系统的研究中. 但事实上,封闭量子系统只是真实量子系统的理想化模型. 真实量子系统总与一个或多个量子系统相互作用,因此是开放的. 这样的量子系统会受到退相干的作用,使得系统塌缩,从而使量子系统变为经典系统,量子博弈的特性也就随之消失了. 因此考虑退相干作用对量子博弈的影响是一个有意义的研究方向. 特别地,为了达到预期的博弈结果,系统之间的相互作用是需要调节和控制的,因此量子博弈可以与量子控制相结合,使得退相干作用被受控量子系统所控制,保证量子博弈的预期结果. 另外,还可以考虑量子博弈策略集为无穷维 Hilbert空间时,相应的 Nash均衡问题. 这方面的工作在经典博弈论中已比较完善. 但量子博弈与经典博弈有着本质区别,这一方向的研究可以加深对量子博弈内在机理的认识. 不仅如此,量子博弈还有助于量子计算机的研究,为量子计算机的实现搭建良好的理论平台. 同时,量子博弈在量子生物、量子市场、量子计算等许多领域都得到了成功的应用. 综上所述,量子博弈开拓了博弈论的疆界,并且成功地应用于许多相关领域. 最重要的是,量子博弈的研究将促进不同学科的交叉和融合,为解决经典博弈问题开辟新的思路.

参考文献:

[1] VON NEUMANN J, MORGENSTERN O. The theory of games and economic behavior[M]. 3rd ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.

[2] EISERT J, WILKENS M, LEWENSTEIN M. Quantum games and quantum strategies[J]. Phys Rev Lett, 1999, 83: 3077-3080.

[3] MEYER D. Quantum strategies[J]. Phys Rev Lett, 1999, 82: 1052-1055.

[4] PIOTROWSKI E W. Quantum market games [EB/OL]. [2001-04-02]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0104006v1.

[5] PIOTROWSKI E W, LADKOWSKI S. Quantum market games[J]. Physica A, 2002, 312: 208-216.

[6] PIOTROWSKI E W, LADKOWSKI S. Quantum english auctions[J]. Physica A, 2003, 318: 505-515.

[7] WAITE S. Quantum investing[M]. London: Texere Publishing, 2002.

[8] SLADKOWSKI J. Giffen paradoxes in quantum market games[J]. Physica A, 2003, 324: 234-240.

[9] PIOTROWSKI E W. Fixed point theorem for simple quantum strategies in quantum market games [J]. Physica A, 2003, 324: 196-200.

[10] GOLDENBERG L, VAIDMAN L, WIESNER S. Quantum gambling[J]. Phys Rev Lett, 1999, 82: 3356-3359.

[11] ZHANG S Y, L I C F, WAN L L, et al. Optical realization of quantum gambling machine [EB /OL]. [2000-01-06]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph /0001008.

[12] HWANG W Y, AHN D, HWANG S W. Quantum gambling using two nonorthogonal states [J]. Phys Rev A, 2001, 64: 064302.

[13] HWANG W Y, MATSUMOTO K. Quantum gambling using three nonorthogonal states [J]. Phys Rev A, 2002, 66: 052311.

[14] W ITTE F M C. Quantum 2-player gambling and correlated pay-off [EB /OL]. [2002-06-16]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph? papernum = 0207085.

[15] SEGRE G. Law of excluded quantum gambling strategies [EB /OL]. [2001-04-17]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph /0104080v1.

[16] P IOTROW SKI E W, LADKOW SKI S. Quantum computer: an appliance for playing market games [EB /OL]. [2003-05-05]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph /0305017.

[17] PATEL A. Testing quantum dynamics in genetic information processing [J]. Journal of Genetics, 2001, 80 (1): 39-43.

[18] GL IMCHER P W. Decisions, decisions, decisions: choosing a biological science of choice [J]. Neuron, 2002, 36 (2): 323-332.

[19] GL IMCHER P W. Decisions, uncertainty, and the brain—the science of neuroeconomics [M]. Cambridge: M IT Press, 2003.

[20] COLLUM G. Systems of logical systems: neuroscience and quantum logic [J]. Foundations of Science, 2002, 7 (1-2): 49-72.

[21] KEYL M. Fundamentals of quantum information theory [J]. Physics Reports, 2002, 369 (5): 431-548.

[22] DEUTSCH D. Quantum theory of probability and decisions [C] / /Proceedings of the Royal Society of London A, [S. l.], 1999: 3129-3137.

[23] HORODECKI R, HORODECKI M, HORODECKI P. Quantum information isomorphism: beyond the dilemma of scylla of ontology and charybdis of instrumentalism [EB /OL]. [2003-05-05]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph /0305024.

[24] NOWAK M A. Five rules for the evolution of cooperation [J]. Science, 2006, 314: 1560-1563.

[25] DU J F, L I H, XU X D, SH I M J, ZHOU X Y, HAN R D. Entanglement playing a dominating role in quantum games [J]. Phys Lett A, 2001, 289: 9-15.

[26] ÖZDEM IR S K, SH IMAMURA J, IMOTO N. Quantum advantage does not survive in the presence of a corrupt source: optimal strategies in simultaneous move games [J]. Phys Lett A, 2004, 325: 204-211.

[27] DU J F, XU X D, L I H. Playing prisoner's dilemma with quantum rules [J]. Fluctuation and Noise Letters, 2002, 2 (4): 389-2 903.

[28] DU J, L I H, XU X, SH I M, WU J, ZHOU X, HAN R. Experimental realization of quantum games on a quantum computer [J]. Phys Rev Lett, 2002, 88: 137792.

[29] N IELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 45-68.

[30] LEE C, JOHNSON N F. Efficiency and formalism of quantum games [J]. Phys Rev A, 2003, 25: 022311.

[31] E ISERT J, W ILKENS M. Quantum games [J]. Journal of Modern Optics, 2000, 47: 2543-2556.

[32] MAR INATTO L, WEBER T. A Quantum approach to static games of complete information [J]. Phys Lett A, 2000, 272 (5-6): 291-303.

[33] NAWAZ A, TOOR A H. Worst-case payoffs in quantum battle of sexes game [EB /OL]. [2001-11-20]. http: / /arxiv. org/PS_cache /quant-ph /pdf/0110 /0110096v2. pdf.

[34] DU J F, XU X D, L I H, ZHOU X Y, HAN R D. Nash equilibrium in the quantum battle of sexes game [EB /OL]. [2000-10-12]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph /0010050.

[35] DU J F, L I H, XU X D, SH I M J, ZHOU X Y, HAN X Y. Remark on quantum battle of the sexes game [EB /OL]. [2001-03-02]. http: / /arxiv. org/abs/quant-ph /0103004.

[36] TOYOTA N. Quantization of the stag hunt game and the Nash equilibrium [EB /OL]. [2003-07-04]. http: / /arxiv. org/PS_cache /quant-ph /pdf/0307 /0306929v1. pdf.

[37] CHEN Q, WANG Y, L IU J T, WANG K L. N-player quantum minority game [J]. Phys Lett A, 2004, 327: 98-102.

[38] FL ITNEY A P, GREENTREE A D. Coalitions in the

quantum minority game: classical cheats and quantum bullies[J]. Phys Lett A, 2007, 362: 132-137.

[39] CABELLO A. Two-player quantum pseudotelepathy based on recent all-versus-nothing violations of local realism[J]. Phys Rev A, 2006, 72: 022302.

[40] TAFLIOVICH A, HEHNER E C R. Programming telepathy: implementing quantum non-locality games[EB/OL]. [2007-07-11]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0697.1527v1.

[41] FLITNEY A P, ABBOTT D. Quantum version of the monty hall problem[J]. Phys Rev A, 2002, 65: 062318.

[42] D'ARIANO G M, GILL L D, KEY M, WERNER R F, KUMMERER B, MAASSEN H. The quantum monty hall problem[J]. Quant Inf and Comput, 2002, 2: 355-366.

[43] IQBAL A, TOOR A H. Quantum repeated games[J]. Phys Lett A, 2002, 300: 541-546.

[44] IQBAL A, TOOR A H. Quantum cooperative games[J]. Phys Lett A, 2002, 293: 103-108.

[45] STOHLER M, FISCHBACH E. Non-transitive quantum games[EB/OL]. [2003-07-09]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0306971.

[46] HUBERMAN B A, HOGG T. Quantum solution of coordination problems[EB/OL]. [2003-06-17]. http://arxiv.org/abs/quant-ph? papernum=0306112.

[47] ZDEMIR S K, SHIMAMURA J, MORIKOSHI F, IMOTO N. Dynamics of a discoordination game with classical and quantum correlations[J]. Phys Lett A, 2004, 333: 218-231.

[48] FLITNEY A P, ABBOTT D. Quantum Duels and Truels[EB/OL]. [2003-05-12]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0305058v1.

[49] FLITNEY A P, ABBOTT D. Quantum models of parrondo's games[J]. Physica A, 2003, 324: 152-156.

[50] WANG X B, KWEK L C, OH C H. Quantum roulette: an extended quantum strategy[J]. Phys Lett A, 2004, 277: 44-46.

[51] CABELLO A, CALSAMIGLIA J. Quantum entanglement, indistinguishability, and the absent-minded driver's problem[J]. Phys Lett A, 2005, 336: 441-447.

[52] QIN G, CHEN X, SUN M, ZHOU X, DU J. Appropriate quantization of asymmetric games with continuous strategies[J]. Phys Lett A, 2005, 240: 77-86.

[53] RAVON T, VAIDMAN L. The three-box paradox revisited[EB/OL]. [2006-08-06]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0606025v2.

[54] MAKOWSKI M, PIOTROWSKI E W. Quantum cat's dilemma: an example of intransitivity in a quantum game[J]. Phys Lett A, 2006, 355: 250-254.

[55] IQBAL A, TOOR A H. Backwards-induction outcome in a quantum game[J]. Phys Rev A, 2002, 65: 052328.

[56] LI C F, ZHANG Y S, HUANG Y F, GUO G C. Quantum strategies of quantum measurements[J]. Phys Lett A, 2001, 279: 257-260.

[57] PIETARINEN A. Quantum logic and quantum theory in a game-theoretic perspective[J]. Open Systems and Information Dynamics, 2002, 9: 273-290.

[58] LI Y, QIN G, ZHOU X Y, DU J F. The application of asymmetric entangled states in quantum games[J]. Phys Lett A, 2006, 355: 447-451.

[59] AHMED E, ELETTREBY M F, HEGAZI A S. On quantum team games[J]. Inter J Theo Phys, 2006, 45(5): 907-913.

[60] BENJAMIN S C, HAYDEN P M. Multi-player quantum games[J]. Phys Rev A, 2001, 64: 030301.

[61] DU J F, LI H, XU X D, ZHOU X Y, HAN R D. Entanglement enhanced multiplayer quantum games[J]. Phys Lett A, 2002, 302: 229-233.

[62] CHEN B, MA Y J, LONG G L. Quantum game with restricted matrix strategies[EB/OL]. [2004-05-28]. http://arxiv.org/abs/quant-ph//0301062 v2.

[63] ZHOU J, MA L, LI Y. Multiplayer Quantum games with continuous-variable strategies[J]. Phys Lett A, 2005, 339: 10-17.

[64] HAN Y J, ZHANG Y S, GUO G C. W state and Greenberger-Horne-Zeilinger state in quantum three-person prisoner's dilemma[J]. Phys Lett A, 2002, 295: 61-64.

[65] MA Y J, LONG G L, DENG F G, LI F, ZHANG S X. Cooperative three- and four-player quantum games[J]. Phys Lett A, 2002, 301: 117-124.

[66] BULUTA I M, FUJIWARA S, HASEGAWA S. Quantum games in ion traps[J]. Phys Lett A, 2006, 358: 100-104.

[67] MAYNARD S J, PRICE G R. The logic of animal conflict [J]. Nature, 1972, 246: 15-18.

[68] IQBAL A. Impact of entanglement on the game-theoretical concept of evolutionary stability [EB/OL]. [2005-08-21]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0508052v1.

[69] FLITNEY A, HOLLENBERG L C L. Nash equilibria in quantum games with generalized two-parameter strategies [J]. Phys Lett A, 2007, 363: 380-388.

[70] IQBAL A, TOOR A H. Evolutionarily stable strategies in quantum games[J]. Phys Lett A, 2001, 280(5-6): 249-256.

[71] IQBAL A, TOOR A H. Entanglement and dynamic stability of Nash equilibria in a symmetric quantum game [J]. Phys Lett A, 2001, 286(4): 245-250.

[72] IQBAL A, TOOR A H. Stability of mixed Nash equilibria in symmetric quantum games [EB/OL]. [2004-07-06]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0106056v4.

[73] IQBAL A, TOOR A H. Quantum mechanics gives stability to a Nash equilibrium [J]. Phys Rev A, 2002, 65: 022306.

[74] IQBAL A, TOOR A H. Darwinism in quantum systems [J]. Phys Lett A, 2002, 294: 261-270.

[75] CHEN L K, ANG H L, KIANG A D, KWEK L C, LO C F. Quantum prisoner dilemma under decoherence [J]. Phys Lett A, 2003, 316: 317-323.

[76] FLITNEY A P, HOLLENBERG L C L. Multiplayer quantum minority game with decoherence [J]. Quant Inform Comput, 2007, 7: 111-126.

[77] HIDALGO E G. Quantum games entropy[J]. Physica A, 2007, 382: 787-794.

[78] HIDALGO E G. Quantum replicator dynamics[J]. Physica A, 2006, 368: 393-407.

[79] IQBAL A, TOOR A H. Equilibrium of replicator dynamics in quantum games[EB/OL]. [2004-04-01]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0106135v2.

[80] CHEN J L, KWEK L C, OH C H. Noisy quantum game [J]. Phys Rev A, 2002, 65: 052320.

[81] ZHOU L, KUANG L M. Proposal for optically realizing a quantum game [J]. Phys Lett A, 2003, 315: 426-430.

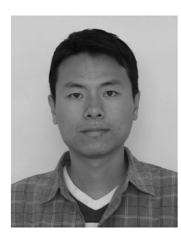
[82] LU J, ZHOU L, KUANG L M. Linear optics implementation for quantum game with two players [J]. Phys Lett A, 2004, 330: 48-53.

[83] NAVROZ P. Quantum games: states of play [J]. Nature, 2007, 445: 144-146.

作者简介:

王 龙,教授,博士生导师.主要研究方向为复杂系统智能控制、多机器人系统的协调与控制、网络化控制系统的分析与综合、集群行为与集群智能、复杂网络上的演化博弈等,获得国家教委霍英东奖研究类一等奖、国家自然科学奖、国家教委科技进步一等奖、第一届 Ho Out-standing Paper Award、第一届关肇直控制理论奖等多项奖励.

王 靖,女,1982年生,博士研究生,主要研究方向为演化博弈动力学、量子博弈和语言博弈等.



武 斌,男,1983年生,博士研究生,主要研究方向为网络上的演化动力学、量子博弈和观点动力学.