

小波去噪中软硬阈值的一种改良折衷法

郭晓霞, 杨慧中

(江南大学 通信与控制工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 在小波域中分析了传统软阈值法和硬阈值法的特点, 并在标准软硬阈值折衷法的基础上, 提出了一种软硬阈值改良折衷法. 与标准软硬阈值折衷法相比, 其阈值函数具有更加灵活多变的形式, 便于进行各种数学处理; 与传统软阈值法和硬阈值法相比, 它克服了硬阈值函数不连续的缺点, 减小了软阈值函数中的估计小波系数与分解小波系数之间存在的恒定偏差. 仿真实验结果表明, 该改良方法的去噪性能优于传统软阈值法、硬阈值法、标准软硬阈值折衷法及一些现有的新阈值函数法.

关键词: 小波变换; 阈值去噪; 阈值函数; 均方误差

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-4785 (2008) 03-0222-04

An improved compromise for soft/hard thresholds in wavelet denoising

GUO Xiao-xia, YANG Hui-zhong

(School of Communication & Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: The characteristics of two traditional wavelet compromise methods, referred to as the soft-thresholding method and the hard-thresholding method, were analyzed in the wavelet domain. A new compromise thresholding method that improves performance is presented, based on the standard compromise threshold method, yet more flexible and easier to treat mathematically. Compared with traditional wavelet compromise methods, the new approach avoids the discontinuity of the hard-threshold method and also decreases the fixed bias between the estimated wavelet coefficients and the decomposed wavelet coefficients of the soft-threshold method. Simulation results show that the improved method is better at denoising than the soft-threshold method, the hard-threshold method, the standard compromised threshold method, as well as other threshold function methods.

Keywords: wavelet transform; threshold denoising; threshold function; MSE

在实际应用中得到的信号含有大量有用信息, 但同时还夹杂着各种干扰信号(噪声), 而这些干扰信号的存在严重影响了信号的本来面目, 不利于信号的进一步分析和处理. 所以, 在信号的预处理过程中对噪声加以消除或减小, 最大程度的提取出有用的信号, 是非常必要和重要的. 小波变换是在傅里叶变换的基础上发展起来的一种处理信号的时频分析方法, 它具有多分辨率分析的特点, 而且在时频域都具有表征信号局部特征的能力, 是一种窗口大小固定不变, 但其形状可变、时间窗和频率窗可变的时频局部化分析方法. 即在低频部分具有较高的频率分

辨率和较低的时间分辨率, 在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率, 很适合于探测正常信号中夹带的瞬态反常现象并展示其成分, 所以被誉为分析信号的显微镜. 利用小波去噪是小波变换的重要应用领域, 而在众多小波去噪方法中, 阈值法得到了广泛的应用, 这是因为用阈值法去噪不仅能够几乎完全抑制噪声, 而且可以很好地保留反映原始信号的特征尖峰点, 具有很好的去噪效果. 事实上, 人们已证明在均方误差意义上硬阈值法能得到原信号的近似最优估计, 而采用软阈值法所得到的估计信号至少与原始信号同样光滑. 然而传统的软、硬阈值法存在一定的缺点, 即软阈值法会使去噪后的信号丢掉某些特征, 而硬阈值法在平滑方面有所欠缺, 所以本文在此基础上进行了改进.

收稿日期: 2007-09-07.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674092); 江苏省高新技术研究(工业)基金资助项目(BG2006010).

通讯作者: 郭晓霞. E-mail: guoxiaoxia1983@126.com

1 一维多分辨率分析

定义^[1] 设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个闭子空间列, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 被称为一维多分辨率分析 (MRA), 如果 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 满足下列条件:

- 1) 单调性:
 $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z};$
- 2) 逼近性:
 $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R});$
- 3) 伸缩性:
 $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z};$
- 4) 平移不变性:
 $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z};$
- 5) Riesz 基存在性:

存在 $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset V_0$, 使得 $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的一个 Riesz 基, 即 $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是线性无关的, 且存在常数 A 与 B , 满足 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对任意的 $f(t) \in V_0$, 总存在序列 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{Z})$, 有

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(t-k),$$

且 $A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(t-k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(t-k)|^2.$

对任意函数 $f(t)$, 设 $f_c^j(t)$ 为 $f(t)$ 向尺度空间 V_j 投影后得到的 j 尺度下的逼近函数, 即 $f_c^j(t) = \sum_k d_k^j \phi_{jk}(t)$, $d_k^j = \langle f(t), \phi_{jk}(t) \rangle$ 称为尺度系数.

若将函数 $f(t)$ 向不同尺度的小波空间 W_j 投影, 则可以得到不同尺度下的细节信号 $f_d^j(t) = \sum_x d_k^j \psi_{jk}(t)$, 其中, $d_k^j = \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle$ 称为小波系数.

由以上定义, 得到了一个 MRA 的框架, 对任意函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 可在这一框架下进行分解和重构.

2 小波阈值去噪

1995 年, D. L. Dohono^[2-3] 在小波变换的基础上提出了阈值去噪的方法, 其基本思想是, 当小波系数 w_{jk} 小于某个临界阈值时, 认为这时的 w_{jk} 主要是由噪声引起的, 应该舍弃; 当 w_{jk} 大于这个临界阈值时, 认为这时的小波系数主要是由信号引起的, 那么就把这一部分的 w_{jk} 直接保留下来 (硬阈值方法) 或者按某一个固定量向零收缩 (软阈值方法), 然后用新的小波系数进行小波重构得到去噪后的信号.

Donoho 使用的硬阈值函数为

$$\hat{w}_{jk} = \begin{cases} w_{jk}, & |w_{jk}| \geq \lambda; \\ 0, & |w_{jk}| < \lambda. \end{cases}$$

软阈值函数为
$$\hat{w}_{jk} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{jk}) (|w_{jk}| - \lambda), & |w_{jk}| \geq \lambda; \\ 0, & |w_{jk}| < \lambda. \end{cases}$$

图 1 是这 2 种方法的示意图.

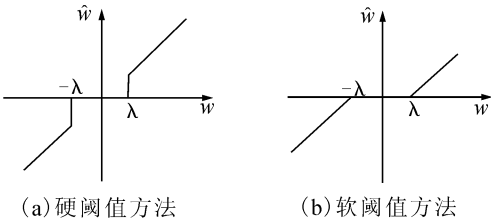


图 1 软、硬阈函数的示意图
Fig 1 Schematic diagram of soft-threshold function and hard-threshold function

小波阈值去噪的具体处理过程: 选择一个小波并确定分解层数, 然后将含噪信号在各尺度上进行小波分解, 保留大尺度低分辨率下的全部小波系数; 对于各尺度高分辨率下的小波系数, 可以设定一个阈值, 幅值低于该阈值的小波系数置为 0, 高于该阈值的小波系数或者完整保留, 或者作相应的“收缩 (shrinkage)”. 最后将处理后获得的小波系数利用逆小波变换进行重构, 恢复出有效的信号. 在以上处理过程中, 最关键的是如何选择阈值及如何进行阈值量化, 在某种程度上, 它关系到信号降噪的质量.

在阈值的选取中, Donoho 等给出的通用阈值:

$$\lambda = \sqrt{2 \log(N)}$$

在各个尺度上是固定不变的, 但由于噪声对应的小波系数在每一尺度上均匀分布, 并且随着尺度 j 的增加其幅值有所减小, 所以在文献 [4] 中将阈值取为

$$\lambda(j) = \sqrt{2 \log(N)} / \log(j+1).$$

式中: σ 是噪声强度, j 是分解尺度, N 为信号长度. 显然, 随着尺度 j 的增加, $\lambda(j)$ 逐渐减小, 该特性与噪声在小波变换各尺度上的传播特性相一致.

3 软硬阈值的改良折衷法

硬阈值法和软阈值法虽然得到了广泛的应用, 也取得了较好的效果, 但是方法本身还存在一些潜在的缺点. 从图 1 可以看出, 软阈值法估计得到的小波系数 \hat{w}_{jk} 整体连续性好, 从而使估计信号不会产生附加振荡, 但当 $|w_{jk}| \geq \lambda$ 时, \hat{w}_{jk} 与 w_{jk} 总存在恒定的偏差, 直接影响着重构信号与真实信号的逼近程度; 硬阈值法在均方误差意义上优于软阈值法, 但是所得到的估计信号会产生附加振荡, 不具有同原始信号一样的光滑性, 这是由硬阈值处理函数在

处不连续引起的,其中均方误差 MSE 定义为以下数学表达式:

$$\text{MSE} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{s}(k) - s(k))^2.$$

式中: $\hat{s}(k)$ 为去噪后的估计信号, $s(k)$ 为原始信号. 从上面的分析可知,单一地采用硬阈值法或软阈值法,去噪效果并不理想. 但仔细分析可以发现,由于单纯的软阈值法估计出来的小波系数 \hat{w}_{jk} ,其绝对值总比 w_{jk} 小 ($w_{jk} \neq 0$ 时),所以要设法减小此偏差. 不过,若把这种偏差减小为零(硬阈值情况)也未必是好的.

一个含噪的一维信号模型可表示为如下形式:

$$s(n) = f(n) + e(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

式中: $s(n)$ 为含噪信号, $f(n)$ 为原始信号, $e(n)$ 是噪声强度, $e(n)$ 为噪声信号. 对其作离散小波变换,即

$$w_{jk} = 2^{-j/2} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) (2^{-j} - k).$$

因为小波变换是线性变换,所以得到的小波系

$$\hat{w}_{jk} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{jk}) \left(|w_{jk}| - \frac{b}{a^{|w_{jk}|} + b} \right), & |w_{jk}| \geq a \\ 0, & |w_{jk}| < a \end{cases} \quad (1)$$

式中:参数 a, b 均为大于 1 的实常数,根据实际情况可调整 a, b 取值. 而

$$\lim_{a \rightarrow 1} \text{sgn}(w_{jk}) \left(|w_{jk}| - \frac{b}{a^{|w_{jk}|} + b} \right) = \text{sgn}(w_{jk}) (|w_{jk}| - 1). \quad (2)$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \text{sgn}(w_{jk}) \left(|w_{jk}| - \frac{b}{a^{|w_{jk}|} + b} \right) = w_{jk}. \quad (3)$$

式 (2) 和式 (3) 说明,当 $a = 1$ 时,式 (1) 接近软阈值函数;当 $a \rightarrow +\infty$ 时,式 (1) 接近硬阈值函数,由此可知,改进的阈值函数是介于软、硬阈值函数之间的一个灵活选择,可通过参数 a 和 b 的调整,得到实用有效的阈值函数. 考虑函数

$$f(x) = \text{sgn}(x) \left(|x| - \frac{b}{a^{|x|} + b} \right). \quad (4)$$

当 $x < 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{- \left(-x - \frac{b}{a^{-x} + b} \right)}{x} = 1.$$

当 $x > 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{b}{a^x + b}}{x} = 1,$$

而

数 w_{jk} 仍由 2 部分组成,一部分是信号 $f(n)$ 对应的小波系数,记为 u_{jk} ;另一部分是噪声 $e(n)$ 对应的小波系数,记为 v_{jk} . w_{jk} 可能受 v_{jk} 的影响而使 $|w_{jk}| > |u_{jk}|$,为使 $\hat{w}_{jk} - u_{jk}$ 最小,因此使 $|\hat{w}_{jk}|$ 的取值介于 $|w_{jk}| -$ 和 $|w_{jk}|$ 之间可能会使估计出来的小波系数 \hat{w}_{jk} 更加接近于 u_{jk} ,基于这一思想^[4-6],文献 [1] 定义了软硬阈值折衷法,构造的阈值函数如下:

$$\hat{w}_{jk} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{jk}) (|w_{jk}| - a), & |w_{jk}| \geq a \\ 0, & |w_{jk}| < a \end{cases}$$

式中: a 的取值范围为 $0 < a < 1$. 显然,当 $a = 1$ 时,此阈值函数在 \pm 处连续,而当 $a \neq 1$ 时,此阈值函数在 \pm 处不连续,所以通过软硬阈值折衷法处理后,所得到的估计信号可能会产生附加振荡.

本文在上述软硬阈值折衷法的基础上进行了改进,改进的阈值函数为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sgn}(x) \left(\frac{b}{a^{|x|} + b} \right) = 0.$$

所以式 (4) 是以直线 $y = x$ 为渐近线的,即改进的阈值函数是以 $\hat{w}_{jk} = w_{jk}$ 为渐近线的,随着 w_{jk} 的增大, \hat{w}_{jk} 逐渐接近 w_{jk} ,减小了软阈值函数中 \hat{w}_{jk} 与 w_{jk} 之间的恒定偏差. 另外,改进的阈值函数不仅在 a, b 取任意值时具有连续性,而且比软硬阈值折衷法中的参数 a 有更大的取值空间. 除此之外,该阈值函数还高阶可导,便于进行各种数学处理,所以改进的阈值函数较传统的软、硬阈值函数更加优越.

4 仿真实验

本文定义的信噪比 SNR 公式为

$$\text{SNR} = \log \left[\frac{\hat{x}^2(n)}{[x(n) - \hat{x}(n)]^2} \right].$$

式中: $x(n)$ 是原始信号, $\hat{x}(n)$ 是经小波降噪后的估计信号.

为了说明改进的阈值函数在阈值去噪方法中的优越性,在 Matlab 中对一信噪比是 6 809 8 的含噪信号:

$$x = 30 \sin(t) + 25 \sin(2t) + \text{rand}(n).$$

分别采用软阈值法、硬阈值法、软硬阈值折衷

法、文献 [4] 提出的新阈值函数法和本文提出的改良方法进行了仿真实验,其中文献 [4] 构造的新阈值函数如下:

$$w_{j,k} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(w_{j,k}) \left[\frac{|w_{j,k}|}{\exp\left(\frac{|w_{j,k}|}{N}\right)} \right], & |w_{j,k}| \geq \lambda; \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda. \end{cases}$$

式中: N 为任意正常数. 仿真中采用的小波基是 db4 小波,分解层数为 3 层,结果如表 1 所示.

表 1 5 种方法的降噪性能比较

阈值去噪方法	信噪比 SNR	均方差 MSE
软阈值法	6.972 1	0.828 25
硬阈值法	7.653 3	0.420 06
软硬阈值折衷法 $a=0.05$	7.664 0	0.415 55
软硬阈值折衷法 $a=0.10$	7.668 4	0.413 65
软硬阈值折衷法 $a=0.15$	7.666 5	0.414 38
文献 [4] 提出的方法 $N=0.20$	7.720 4	0.392 81
文献 [4] 提出的方法 $N=0.25$	7.722 4	0.392 01
文献 [4] 提出的方法 $N=0.26$	7.722 5	0.392 00
文献 [4] 提出的方法 $N=0.27$	7.722 4	0.392 02
改良方法 $a=2\,000, b=13$	7.732 1	0.388 24
改良方法 $a=4\,000, b=13$	7.733 6	0.387 65
改良方法 $a=6\,000, b=13$	7.734 1	0.387 44
改良方法 $a=8\,500, b=13$	7.734 5	0.387 32

从表 1 可以看出,本文提出的改良方法的去噪结果在信噪比和均方差意义上都优于其他几种方法,并且在一定范围内选取适当的 a, b 值,其效果将更明显.

5 结束语

在 Donoho 提出的阈值去噪基本思想的基础上,针对软、硬阈值函数存在的缺点,对软硬阈值折衷法进行了改进.通过实验,对传统的软阈值法、硬阈值法和改进前后的软硬阈值折衷法的去噪性能进行了比较.仿真结果表明,改进的软硬阈值折衷法是介于软、硬阈值法的一个更加灵活、优越的选择.但需指出的是,实验中采用的 (j) 并不是最优的,如果 (j) 选取恰当,则本文提出的方法更能体现其优越性.

参考文献:

[1] 徐晨,赵瑞珍,甘小冰.小波分析·应用算法[M].北京:科学出版社,2004:64-108.

[2] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans on IT, 1995, 41(3): 613-627.

[3] DONOHO D L, JOHNSTONE I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of American Stat Assoc, 1995, 12(90): 1200-1224.

[4] 张维强,宋国乡.基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪[J].西安电子科技大学学报,2004,31(2):296-299.

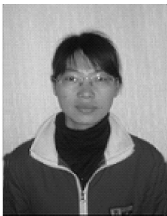
ZHANG Weiqiang, SONG Guoxiang. Signal de-noising in wavelet domain based on a new kind of thresholding function[J]. Journal of Xidian University, 2004, 31(2): 296-299.

[5] 付炜,许山川.一种改进的小波域阈值去噪算法[J].传感技术学报,2006,19(2):534-540.

FU Wei, XU Shanchuan. Improved algorithm for threshold de-noising in wavelet transform domain[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2006, 19(2): 534-540.

[6] DONG Yongsheng, YI Xuming. Wavelet de-noising based on four improved functions for threshold estimation[J]. Journal of Math, 2006, 26(5): 473-477.

作者简介:



郭晓霞,女,1983年生,硕士研究生,主要研究方向为基于小波变换的超声检测信号去噪方法研究.



杨慧中,女,1955年生,江南大学通信与控制工程学院党委书记,检测与过程控制研究所所长,教授、博导,主要研究方向为生产过程参数检测与监控、复杂生产过程的建模与优化控制等.参与完成国家自然科学基金项目、863项目

各 1 项、主持国家自然科学基金项目 1 项、江苏省高技术项目 1 项、教育部重点科研项目 1 项. 获得省级科技进步奖 3 项,省级教学成果奖 1 项、获得江苏省优秀专利 1 项、授权专利 4 项. 发表论文 50 多篇,20 多篇被 SC 和 E 检索.