

线性不确定离散时滞系统的鲁棒非脆弱 H 控制

吴 珠, 刘国栋

(江南大学 通信与控制工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 基于线性矩阵不等式(LMI)方法,研究了线性不确定离散时滞系统的鲁棒非脆弱 H 状态反馈控制器的设计问题. 系统的不确定项参数和控制器的增益变化都是时变的且满足线性分式形式的范数有界. 考虑了控制器增益存在加性和乘性摄动的2种情形,以LMI形式给出了非脆弱 H 控制器存在的充分条件,保证了闭环系统的鲁棒稳定性和一定的 H 衰减水平. 实例表明了该设计方法的有效性.

关键词: 不确定系统; 时滞; 非脆弱; 鲁棒 H 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-4785(2008)01-0066-05

Robust and non-fragile H control for linear discrete-time systems with time-delay and uncertainties

WU Zhu, LIU Guo-dong

(College of Communication and Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: This paper deals with the problem of robust and non-fragile H control via state feedback for linear discrete-time systems with time-delay and norm-bounded parametric uncertainties by using a method of linear matrix inequality (LMI). Both the gain perturbations of the controller and the uncertain terms of the system are time-varying and norm-bounded with linear fractional form. Moreover, the gain perturbations of the controller are considered to be either additive or multiplicative. Sufficient conditions for the existence of a robust and non-fragile controller are given in terms of LMI, so the resulting closed-loop system is robustly stable and attains a certain H attenuation level. A numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the method.

Key words: uncertain system; time-delay; non-fragile; robust H control; linear matrix inequalities

在各类工业系统中,模型的不确定性和时滞现象是普遍存在的,对这类系统的分析和综合问题一直是控制理论和控制工程领域中的研究热点,鲁棒 H 控制问题就是其中之一^[1-3]. 但所设计的控制器都要求是准确实现的,而实际上,由于数字器件的有限字长、模数转换的精度等原因,使得控制器存在着一定的不确定性,从而造成闭环系统的性能下降甚至稳定性破坏. 因此,近年来非脆弱控制问题引起了人们的关注^[4-8]. 对线性连续系统,文献[5]利用 Riccati 不等式方法设计了非脆弱 H 控制器,文献[6]则运用了 LMI 的方法,文献[7]设计了非线性时滞系统的非脆弱保成本控制器. 对线性离散系统,文献[8]研究了控制器参数具有加性

和乘性增益摄动的 H 控制问题. 文中将在此框架下作进一步扩展,研究不确定离散时滞系统的鲁棒非脆弱 H 控制问题.

1 问题描述

考虑如下一类不确定离散时滞系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (A_d + \Delta A_d)x(k-d) + (B_1 + \Delta B_1)w(k) + (B_2 + \Delta B_2)u(k), \\ z(k) = (C + \Delta C)x(k) + (C_d + \Delta C_d)x(k-d) + (D_1 + \Delta D_1)w(k) + (D_2 + \Delta D_2)u(k), \\ x(k) = 0, k < 0, x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(k) \in R^n$ 是状态变量, $u(k) \in R^m$ 是控制输入, $w(k) \in R^p$ 是外部扰动输入,且 $w \in L_2[0, \infty)$, $z(k) \in R^q$ 是被调输出, $A, A_d, B_1, B_2, C, C_d, D_1, D_2$

收稿日期: 2007-01-25.

通讯作者: 吴 珠. E-mail: jstianlan@126.com.

是适当维常数矩阵, d 是系统状态滞后时间, A 、 A_d 、 B_1 、 B_2 、 C 、 C_d 、 D_1 、 D_2 为不确定实值矩阵函数,它们表示了系统中随时间变化的参数不确定性.

为不失一般性,假定系统的参数不确定性具有如下形式:

$$\begin{bmatrix} A & A_d & B_1 & B_2 \\ C & C_d & D_1 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F_1(k) (I - J_1 F_1(k))^{-1} \cdot [E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4].$$

式中: $H_i (i=1,2)$ 、 $E_i (i=1,2,3,4)$ 为具有适当维数的已知实矩阵,且 $F_1(k)$ 为时变扰动矩阵,Lebasgue 可测并且满足: $F_1^T(k) F_1(k) \leq I$.

考虑到状态反馈控制器本身含有不确定性:

$$u(k) = (K + \Delta K)x(k). \quad (2)$$

式中: $K \in R^{m \times n}$ 为控制器增益矩阵, ΔK 为增益的摄动. 考虑如下 2 种形式的控制器增益摄动:

1) 加法式摄动

$$K = H_3 F_2(k) (I - J_2 F_2(k))^{-1} E_5, \quad F_2^T(k) F_2(k) \leq I. \quad (3)$$

2) 乘法式摄动

$$K = H_4 F_3(k) (I - J_3 F_3(k))^{-1} E_6 K, \quad F_3^T(k) F_3(k) \leq I. \quad (4)$$

式中: $H_i (i=3,4)$ 、 $E_i (i=5,6)$ 为具有适当维数的已知实矩阵, $F_i(k) (i=2,3)$ 为 Lebasgue 可测的时变扰动矩阵并且满足: $F_i^T(k) F_i(k) \leq I$.

将控制器(2)代入系统(1)得到闭环系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_K x(k) + A_{dK} x(k-d) + B_K w(k), \\ z(k) = C_K x(k) + C_{dK} x(k-d) + D_K w(k). \end{cases} \quad (5)$$

式中:

$$\begin{aligned} A_K &= (A + \Delta A) + (B_2 + \Delta B_2)(K + \Delta K), \\ A_{dK} &= A_d + \Delta A_d, B_K = B_1 + \Delta B_1, \\ C_K &= (C + \Delta C) + (D_2 + \Delta D_2)(K + \Delta K), \\ C_{dK} &= C_d + \Delta C_d, D_K = D_1 + \Delta D_1. \end{aligned}$$

$$I = \begin{bmatrix} -X & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -Y & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * & * & * & * \\ AX+B_2W & A_dY & B_1 & -X & * & * & * & * \\ CX+D_2W & C_dY & D_1 & 0 & -I & * & * & * \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & * & * \\ 0 & 0 & 0 & H_1^T & H_2^T & 0 & -I & * \\ E_1X+E_4W & E_2Y & E_3 & 0 & 0 & 0 & J_1 & -I \end{bmatrix},$$

文中的目的是:设计系统(1)的状态反馈控制器(2),使得闭环系统(5)对所有满足 $F_i^T(k) F_i(k) \leq I$ 的 $F_i(k) (i=1,2,3)$ 是渐近稳定的且满足 $z(k)_2 < w(k)_2$, $\gamma > 0$ 是预先给定的常数.

在给出主要结论之前,先给出下列引理.

引理 1^[9] 取 M 、 H 、 E 和 J 为合适维数的实矩阵,且 $M = M^T$,则以下条件等价:

$$1) M + H E + E^T J H^T < 0$$

式中: $J = F(I - J F)^{-1}$, $J^T J < I$, $F^T F \leq I$.

2) 存在常数 $\gamma > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} M & * & * \\ H^T & -I & * \\ E & J & -I \end{bmatrix} < 0.$$

注:文中 * 表示矩阵对称位置元素的转置.

引理 2 对给定的常数 $\gamma > 0$,闭环系统(5)渐近稳定且满足 $z(k)_2 < \gamma w(k)_2$ 的充分条件是存在对称正定矩阵 P 和 Q ,使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} -P+Q & * & * & * & * \\ 0 & -Q & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ A_K & A_{dK} & B_K & -P^{-1} & * \\ C_K & C_{dK} & D_K & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

证明 与文献[3]中引理 2 的证明类似.

2 鲁棒非脆弱 H 状态反馈控制

下面的定理将分别给出当控制器增益存在加性和乘性摄动时,鲁棒非脆弱 H 状态反馈控制问题的解存在的充分条件.

定理 1 对系统(1)和给定的常数 $\gamma > 0$ 存在状态反馈控制器(2),其控制器增益摄动 ΔK 满足式(3),使得闭环系统(5)渐近稳定且满足 $z(k)_2 < \gamma w(k)_2$ 的充分条件是存在 $\gamma > 0 (i=1,2)$,对称正定矩阵 X 和 Y ,矩阵 W ,使得

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ 2 & 3 \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

式中:

$$_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}_2(B_2 H_3)^T & {}_2(D_2 H_3)^T & 0 & 0 & {}_2(E_4 H_3)^T \\ E_5 X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$_3 = \begin{bmatrix} -{}_2 I & {}_2 J_2^T \\ {}_2 J_2 & -{}_2 I \end{bmatrix}.$$

此时,控制器(2)中的反馈增益为 $K = WX^{-1}$.

证明 由引理(1),式(6)等价于

$$\begin{bmatrix} -P + Q & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -Q & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -{}_2 I & * & * & * & * & * \\ A + B_2(K + K) & A_d & B_1 & -P^{-1} & * & * & * & * \\ C + D_2(K + K) & C_d & D_1 & 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & {}_1 H_1^T & {}_1 H_2^T & -{}_1 I & * & * \\ E_1 + E_4(K + K) & E_2 & E_3 & 0 & 0 & {}_1 J_1 & -{}_1 I & {}_1 I \end{bmatrix} < 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -Q & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -{}_2 I & * & * & * & * & * & * & * \\ A + B_2 K & A_d & B_1 & -P^{-1} & * & * & * & * & * & * \\ C + D_2 K & C_d & D_1 & 0 & -I & * & * & * & * & * \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & {}_1 H_1^T & {}_1 H_2^T & 0 & -{}_1 I & * & * & * \\ E_1 + E_4 K & E_2 & E_3 & 0 & 0 & 0 & {}_1 J_1 & -{}_1 I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & {}_2(B_2 H_3)^T & -{}_2 I & * & 0 & {}_2(E_4 H_3)^T & -{}_2 I & * \\ E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_2 J_2 & -{}_2 I \end{bmatrix} < 0.$$

对上式分别右乘 $S = \text{diag}(P^{-1}, Q^{-1}, I, I, I, I, I, I, I, I)$ 和左乘 S^T ,并令 $X = P^{-1}$, $Y = Q^{-1}$, $W = KX$,即可得式(7).

定理 2 对系统(1)和给定的常数 $\gamma > 0$,存在状态反馈控制器(2),其控制器增益摄动 K 满足式(4),使得闭环系统(5)渐近稳定且满足 $\|z(k)\|_2 <$

γ 的充分条件是存在 $\gamma_i > 0 (i = 1, 2)$,对称正定矩阵 X 和 Y ,矩阵 W ,使得式(8)成立.此时,控制器(2)中的增益为 $K = WX^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

式中: $\gamma_1 = \gamma$,

$$_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}_2(B_2 H_4)^T & {}_2(D_2 H_4)^T & 0 & 0 & {}_2(E_4 H_4)^T \\ E_5 W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$_3 = \begin{bmatrix} -{}_2 I & {}_2 J_3^T \\ {}_2 J_3 & -{}_2 I \end{bmatrix}.$$

证明 同定理 1 的证明.

注:若不考虑控制器(2)中的增益摄动($K = 0$),即为标准的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器,那么定理 1 中的式(7)和定理 2 中的式(8)就退化为

$$\gamma_1 < 0. \quad (9)$$

3 仿真实例

将系统(1)的参数矩阵取为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 2 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ -0.3 & 0.4 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.6 \\ 1 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

并设矩阵 $F_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $H_1 = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$,

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_1 = \text{diag}(1, 1.5, 1),$$

$$E_2 = \text{diag}(0.4, 0.2, 0.2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1) 设计具有加法式增益摄动的控制器:

已知

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$F_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

对定理 1, 利用 Matlab LMI Toolbox 进行寻优, 得 LMI(7) 的解为

$$\mu_{1opt} = 6.4424,$$

$$\mu_{1opt} = \begin{bmatrix} -0.5032 & -0.6169 & -0.1877 \\ 0.2422 & -0.1345 & 0.1728 \end{bmatrix} x(k).$$

2) 设计具有乘法式增益摄动的控制器:

$$\text{已知 } H_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.8 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$F_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

同样, 对 LMI(8) 进行寻优, 得最优解为

$$\mu_{2opt} = 6.8473,$$

$$\mu_{2opt} = \begin{bmatrix} -0.4897 & -0.6183 & -0.1983 \\ 0.2387 & -0.1377 & 0.1741 \end{bmatrix} x(k).$$

3) 若不考虑控制器(2)中的增益摄动, 对 LMI(9) 进行寻优得到

$$\mu_{3opt} = 2.1082,$$

$$\mu_{3opt} = \begin{bmatrix} -0.5517 & -0.6359 & -0.1728 \\ 0.2069 & -0.1269 & 0.1491 \end{bmatrix} x(k).$$

当控制器 μ_{3opt} 受到式(4)的增益摄动(取 $F_1 = F_3 = I$)时, 无法得到式(9)的可行解. 由此可见, 标准的控制器虽然具有较高的 H 衰减水平, 但是, 当控制器增益受到很小的扰动时, 无法保证闭环系统渐进稳定, 从而较好说明了本文结果的优越性.

为不失一般性, 假设取 $x(0) = [-10 \ 5 \ 10]^T$, $F_1 = F_2 = F_3 = I$, 当系统受到外部白噪声干扰如图 1, 以

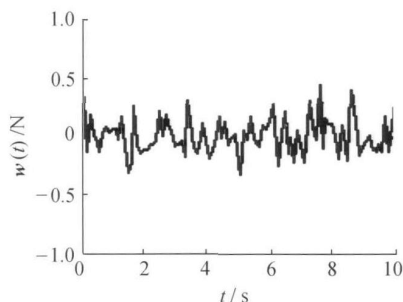


图 1 白噪声信号干扰

Fig. 1 The disturbance of white noise

及控制器 u_{1opt} 和 u_{2opt} 分别受到加性和乘性增益摄动时, 闭环系统(5)的状态响应曲线如图 2、3 所示.

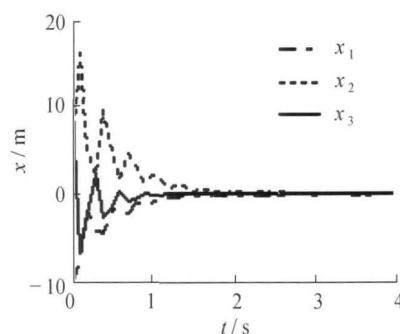


图 2 具有加性增益扰动的状态响应曲线

Fig. 2 State responses under additive gain perturbations

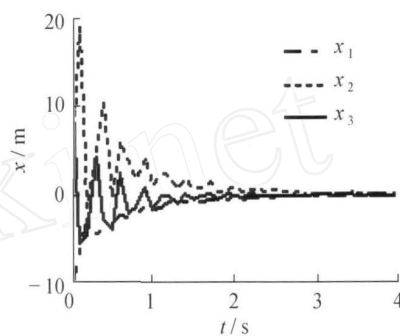


图 3 具有乘性增益扰动的状态响应曲线

Fig. 3 State responses under multiplicative gain perturbations

4 结束语

文中研究了不确定离散时滞系统的鲁棒非脆弱 H 控制问题. 针对控制器增益存在加性和乘性扰动的情形, 以 LMI 形式给出了非脆弱状态反馈 H 控制器存在的充分条件. 所设计的控制器不仅保证闭环系统渐进稳定, 而且满足一定的 H 范数约束. 最后的仿真实例也表明, 非脆弱控制器更能适应实际的工程环境.

参考文献:

- [1] YU L, CHU J, SU H Y. Robust memoryless H controller design for linear time-delay systems with norm bounded time-varying uncertainty [J]. Automatica, 1996, 32(12): 1759-1762.
- [2] De SOUZA C E, LI X. Delay-dependent robust H control of uncertain linear state-delayed systems [J]. Automatica, 1999, 35(9): 1313-1321.
- [3] KIM J H, PARK H B. H state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system [J].

- Automatica, 1999, 35(8): 1443-1451.
- [4] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile or optimal[J]. IEEE Trans Automatica Control, 1997, 42(8): 1098-1105.
- [5] YANG G H, WANG J L. Nonfragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations[J]. Automatica, 2001, 37(5): 727-737.
- [6] 王 武, 杨富文. 具有控制器增益变化的不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(6): 1043-1046.
- WANG Wu, YANG Fuwen. Robust H_∞ control for linear time-delay uncertain systems with controller gain variations[J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(6): 1043-1046.
- [7] XIE N, TANG G Y. Delay-dependent nonfragile guaranteed cost control for nonlinear time-delay systems[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 64(9): 2084-2097.
- [8] 王 武, 杨富文. 不确定离散系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]. 控制工程, 2005, 12(4): 335-338.
- WANG Wu, YANG Fuwen. Robust and non-fragile

H_∞ control for discrete-time uncertain linear systems[J]. Control Engineering of China, 2005, 12(4): 335-338.

- [9] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J Control, 1996, 63(4): 741-750.

作者简介:



吴 珠, 女, 1983 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为基于 LMI 的线性时滞系统的鲁棒控制.



刘国栋, 男, 1950 年生, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为智能控制理论及应用、机器人控制系统等. 发表学术论文 20 余篇.

第 3 届粗糙集与知识技术国际学术会议 The 3rd International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology

Since the introduction of rough sets in 1982 by Professor Zdzislaw Pawlak, we have witnessed great advances in both theory and applications. Rough set theory is closely related to knowledge technology in a variety of forms such as knowledge discovery, approximate reasoning, intelligent and multiagent system design, knowledge intensive computations. The cutting-edge knowledge technologies have great impact on learning, pattern recognition, machine intelligence and automation of acquisition, transformation, communication, exploration and exploitation of knowledge. A principal thrust of such technologies is the utilization of methodologies that facilitate knowledge processing. To present the state-of-the-art scientific results, encourage academic and industrial interaction, and promote collaborative research in rough sets and knowledge technology worldwide, the 3rd International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology will be held in Chengdu, China, May 17-19, 2008.

Topics (included, but are not limited to):

Computing Theory and Paradigms

Knowledge Technology

Intelligent Information Processing

Intelligent Control

More information at <http://sist.swjtu.edu.cn/imc/itw06/rskt2008/>.