

基于模糊双曲模型的积分滑模控制

杨 2, 张化光

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要:针对一般形式的非线性系统,提出一种基于模糊双曲模型(FHM)的积分滑模控制器设计方法.利用模糊双曲模型来表述这类连续非线性系统.构建出积分滑模面,利用线性矩阵不等式(LMI)方法得到滑模动态渐近稳定的充分条件.设计了积分滑模控制器,保证了系统的状态轨迹能够在有限时间内到达滑模面上并且保持在它上面运动.仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词:积分滑模控制; 模糊双曲模型; 非线性系统

中图分类号:TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1673-4785(2008)01-0062-04

Design of integral sliding mode controller based on fuzzy hyperbolic model

YANG Jun, ZHANG Hua-guang

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: An integral sliding mode controller design method is presented based on fuzzy hyperbolic model (FHM) for general form nonlinear systems. First, an FHM is employed to represent a class of nonlinear continuous-time systems. Then an integral sliding surface is constructed. A sufficient condition is derived to guarantee the asymptotical stability of the sliding dynamics in terms of linear matrix inequality (LMI). Next, the synthesized sliding mode controller guarantees the reachability of the specified sliding surface in finite time interval. Finally, a simulation example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: integral sliding mode control; fuzzy hyperbolic model; nonlinear system

滑模控制(也称变结构控制)以其算法简单,易于实现及良好的鲁棒性等优点,一直受到国内外控制领域学者的普遍关注^[1-4].近20年来,针对非线性系统,以微分几何为主要工具来研究其滑模控制问题,取得了许多成果^[2].但这类方法往往需要系统满足一些特定的形式,所以针对一般形式的非线性系统而研究其滑模控制问题是具有现实意义的.

模糊控制技术已经被广泛的应用于对复杂的非线性系统建模及控制器的实现上.理论证明也显示了模糊模型具有万能逼近能力^[5].特别是针对T-S模糊模型,近年来被广泛的应用^[6].实际上,基于T-S模糊模型的滑模控制问题,也已取得了许多的成

果,例如文献[3].平行于T-S模糊模型,文献[7]提出一种新型模糊模型——模糊双曲模型(FHM),它同样可以用来描述一类未知非线性系统,并且文献[8]已经证明FHM具有一致逼近能力.文献[9-11]在文献[7]的基础上给出了基于FHM的一类稳定的模糊控制器设计方法,但是基于该模型的滑模控制的研究还未见报道.文中基于FHM研究了一类连续非线性系统的积分滑模控制问题,仿真结果表明,该方法是有用的.

1 模糊双曲模型

定义1^[8] 已知一个非线性系统由 n 个输入变量 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 和 n 个输出变量 $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T$ 组成.如果用来描述系统的模糊规则基满足以下的条件,则称这组模糊规则基为模糊双曲模型的规则基:

收稿日期:2007-06-11.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60325311, 60534010, 60572070, 60521003).

通讯作者:杨珺. E-mail: yangjun@ise.neu.edu.cn.

1)对每一个输出变量 $\dot{x}_r(t)$, ($r = 1, \dots, n$) 而言,第 k 条规则的形式为

R^k : If x_1 is F_{x_1} , x_2 is F_{x_2} , ..., and x_n is F_{x_n}
Then $\dot{x}_r(t) = \pm C_{F_{x_1}}^r \pm C_{F_{x_2}}^r \pm \dots \pm C_{F_{x_n}}^r$,
 $k = 1, 2, \dots, 2^n$. (1)

式中: F_{x_i} 是与 x_i 对应的模糊子集, 包括正 (P) 和负 (N) 2 个语言值, $\pm C_{F_{x_i}}^r$ 为与 F_{x_i} 对应的 $2n$ 个实常数.

2) 常数项 $\pm C_{F_{x_i}}^r$ 与 F_{x_i} 是一一对应的, 即如果在 If 部分包括 F_{x_i} , 则在 Then 部分应对应包括 $\pm C_{F_{x_i}}^r$; 相反如果在 If 部分不包括 F_{x_i} , 则在 Then 部分也应不包括 $\pm C_{F_{x_i}}^r$. 如果 F_{x_i} 项所描述的语言值是正 (P), 则 $+ C_{F_{x_i}}^r$ 出现在 Then 部分; 如果 F_{x_i} 项所描述的语言值是负 (N), 则 $- C_{F_{x_i}}^r$ 出现在 Then 部分.

3) 此模糊规则基共有 2^n 条模糊规则, 即在 If 部分模糊变量包括所有可能的正 (P)、负 (N) 组合.

为表达简便, 设 $C_{P_i}^r = + C_{F_{x_i}}^r$, $C_{N_i}^r = - C_{F_{x_i}}^r$.

引理 1 给定 n 组模糊双曲模型的规则基, 如果定义输入变量对应的模糊集合 P 和 N 的隶属函数为

$\mu_P(x_i) = e^{-\frac{1}{2}(x_i - l_i)^2}$, $\mu_N(x_i) = e^{-\frac{1}{2}(x_i + l_i)^2}$. (2)

式中: l_i 为常数, 那么应用单点模糊器, 乘机推理机, 和中心平均反模糊器, 可得

$$\dot{x}_r(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{C_{P_i}^r e^{l_i x_i} + C_{N_i}^r e^{-l_i x_i}}{e^{l_i x_i} + e^{-l_i x_i}}}{\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n q_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{e^{l_i x_i} - e^{-l_i x_i}}{e^{l_i x_i} + e^{-l_i x_i}}}{\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n q_i} \tanh(l_i x_i).$$

式中: $p_i = \frac{C_{P_i}^r + C_{N_i}^r}{2}$, $q_i = \frac{C_{P_i}^r - C_{N_i}^r}{2}$. 所以, 整个系统的模型可表示为

$\dot{x}(t) = p + A \tanh(Lx(t)).$ (3)

式中: p 是常向量, A 是常矩阵, $\tanh(Lx) = (\tanh(l_1 x_1), \tanh(l_2 x_2), \dots, \tanh(l_n x_n))^T$, $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_n)$.

称式 (3) 为模糊双曲模型 (FHM).

如果取 $C_{P_i}^r$ 和 $C_{N_i}^r$ 互为相反数, 那么可得到如下的齐次 FHM:

$\dot{x}(t) = A \tanh(Lx(t)).$ (4)

模糊双曲模型具有以下几个优点:

1) 模糊双曲模型集合是 T-S 模糊模型集合的一个真子集. 模糊双曲模型能够逼近定义在致密集上的非线性函数, 是一种全局模型, 因此可以根据此模型来逼近未知的非线性系统.

2) 模糊双曲模型将传统的模糊模型的结构辨识

问题化简为确定对应的模糊变量个数问题, 辨识的复杂性大大降低, 辨识参数的个数较少.

3) 与其他的模糊模型相比, 模糊双曲模型更加适合于所知有限的多变量非线性系统的逼近.

4) 模糊双曲模型也是一种递归神经网络模型, 因此可以通过神经网络强大的学习功能来获取模型参数.

2 积分滑模控制器的设计

若考虑控制输入, 则模糊双曲模型的数学表达式为

$\dot{x}(t) = A \tanh(Lx(t)) + Bu(t).$ (5)

式中: $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbf{R}^m$, $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_n)$, A 和 B 是适当维数的常矩阵.

从式 (5) 中, 可以得到如下结论: 1) 因为 $\tanh(x_i) = x_i - \frac{x_i^3}{3} + \frac{2x_i^5}{15} - \dots$, 所以当 $|x_i(t)|$ 的值很小的时候, FHM 可以近似为线性模型 $\dot{x}(t) = ALx(t) + Bu(t)$; 2) 函数 $\tanh(\cdot)$ 满足 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $|\tanh(a) + \tanh(b)| \leq 1$, 这说明函数 $\tanh(\cdot)$ 是一类奇函数并满足 1-Lipschitz 条件.

选取积分切换函数

$s(t) = Cx(t) - \int_0^t C(A + BK) \tanh(Lx(v)) dv.$ (6)

式中: 需要设计矩阵 $C \in \mathbf{R}^m \times n$, 使 CB 是非奇异的; 设计矩阵 $K \in \mathbf{R}^m \times n$, 使 $A + BK$ 是 Hurwitz 的.

在理想情况下, 当系统进入滑模面以后, 系统的状态轨迹将保持在其上面, 即满足 $s = 0$, 从而有 $\dot{s} = 0$. 所以, 从中可以求出等效控制量:

$u_e = K \tanh(Lx(t)).$ (7)

把式 (7) 代入式 (5), 得到在理想情况下系统的滑模动态方程如下:

$\dot{x}(t) = (A + BK) \tanh(Lx(t)).$ (8)

注 1 这里采用积分滑模方法的主要目的是: 应用它可以较容易的处理一类非线性系统. 因为对这类非线性系统, 尽管可以使用 FHM 来逼近, 但是也不能与线性系统一样, 通过非奇异变换而成为标准型. 因而使用常规的切换函数, 即 $s(t) = Cx(t)$, 对系统 (5) 是失效的.

为考虑滑模运动的稳定性, 基于 LMI 方法给出如下结果:

定理 1 为节省空间, 如果存在对角矩阵 $R > 0$, 矩阵 $V > 0$, 和适当维数的矩阵 W 满足:

$$\begin{bmatrix} V - W - W^T & (A + BK)^T LR + W^T \\ RL(A + BK) + W & -V \end{bmatrix} < 0,$$
 (9)

则滑模动态(8)是渐近稳定的.

证明 选取如下的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = 2 \sum_{i=1}^n r_i \ln(\cosh(l_i x_i)). \quad (10)$$

式中: x_i 是 $x(t)$ 的第 i 个分量, l_i 是 L 第 i 个对角元素, 并且 $l_i > 0, r_i > 0$. 因为

$$\cosh(l_i x_i) = \frac{e^{l_i x_i} + e^{-l_i x_i}}{2} \quad (e^{l_i x_i})^{\frac{1}{2}} (e^{-l_i x_i})^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (11)$$

可知, 对 $\forall x(t)$, 并且当 $x(t) \rightarrow 0$ 时, $V(t) \rightarrow 0$. 因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^n r_i \tanh(l_i x_i) \dot{l}_i x_i = \\ &= 2 \tanh^T(Lx(t)) RL \dot{x} = \\ &= 2 \tanh^T(Lx(t)) RL [(A + BK) \tanh(Lx(t)) + \\ &+ \tanh^T(Lx(t)) [RL(A + BK) + (A + \\ &+ BK)^T LR] \tanh(Lx(t))]. \end{aligned}$$

式中: $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

应用文献[12]中的逆投影引理, 可知式(9)成立等价于:

$$RL(A + BK) + (A + BK)^T LR < 0. \quad (12)$$

如果式(12)成立, 则 $\dot{V}(t) < 0$, 即滑模动态是渐近稳定的.

注2 因为要求 $A + BK$ 是 Hurwitz 的, 所以可以根据线性系统反馈设计的方法, 例如极点配置、特征向量配置等方法来确定矩阵 K , 以满足不同的动态性能. 当然, 同时还要满足定理1的条件, 才能确保滑模动态的稳定性.

下一步, 需要设计积分滑模控制器, 来保证系统的状态轨迹能够在有限时间内到达滑模面上并且保持在它上面运动.

定理2 为节省空间, 如果采用如下积分滑模控制器

$$u(t) = K \tanh(Lx(t)) - (Ys(t) + Z \text{sgn}(s(t))). \quad (13)$$

式中: $Y = \text{diag}(y_i) \in \mathbf{R}^{m \times m}, y_i > 0, Z = \text{diag}(z_i) \in \mathbf{R}^{m \times m}, z_i > 0$, 则系统(5)的状态轨迹能够在有限时间内到达滑模面 $s(t) = 0$ 上并且保持在它上面运动.

证明 选取如下的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T(t) (CB)^{-1} s(t). \quad (14)$$

把式(13)代入式(6), 可得

$$\dot{s}(t) = -CB(Ys(t) + Z \text{sgn}(s(t))). \quad (15)$$

于是有

$$\dot{V}(t) = s^T(t) (CB)^{-1} \dot{s}(t) = -s^T(t) (Ys(t) +$$

$$Z \text{sgn}(s(t))) = \sum_{i=1}^m (y_i s_i^2 + z_i |s_i|).$$

式中: s_i 是 $s(t)$ 的第 i 个分量. 因此, 对 $\forall s(t) \neq 0, \dot{V}(t) < 0$. 这表明, 系统的状态轨迹能够在有限时间内到达滑模面 $s(t) = 0$ 上并且保持在它上面运动.

注3 对于确定的 z_i , 可以通过选取适当的 y_i 加快达到滑模面的时间, 从而可减弱系统抖动对实时控制带来的不利影响.

为了便于实现该控制器, 假设对 $\forall i$, 存在标量, $\bar{y} = \max(y_i) > 0, \bar{z} = \max(z_i) > 0$, 并给出如下推论:

推论1 考虑系统(5)和切换函数(6), 取 $C = B^T R$ 并且 R 是 LMI(9)的解, 如果采用如下积分滑模控制器:

$$u(t) = K \tanh(Lx(t)) - (\bar{y}s(t) + \bar{z} \text{sgn}(s(t))), \quad (16)$$

则系统(5)的状态轨迹能够在有限时间内到达滑模面 $s(t) = 0$ 上并且保持在它上面运动.

因此, 可以按照下列步骤设计变结构控制器:

- 1) 设计矩阵 K , 使 $A + BK$ 是 Hurwitz 的;
- 2) 通过解 LMI(9), 求得对角正定矩阵 R ;
- 3) 取滑模增益矩阵 $C = B^T R$, 并得到积分切换函数 $s(t)$;
- 4) 选取适当标量 $\bar{y} > 0, \bar{z} > 0$, 根据式(16), 设计出控制器 $u(t)$.

3 仿真例子

考虑文献[10]中的连续非线性系统, 经过辨识和建模过程^[7,10], 可以得到它的 FHM 如下:

$$\dot{x}(t) = A \tanh(Lx(t)) + Bu(t). \quad (17)$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1.353 & 3 & 0 \\ 0 & 0.052 & 7 \end{bmatrix}, B = [0 \quad 1]^T.$$

在该例中, 取初值为 $x(0) = [0.1 \quad 0.5]^T$, 并且选择矩阵 $K = [207.533 \quad 3 \quad -19.400 \quad 0]$, 然后求得 $R = \begin{bmatrix} 304.049 & 9 & 0 \\ 0 & 22.486 & 4 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 22.486 \quad 4]$. 取 $\bar{y} = 0.5, \bar{z} = 1$, 则积分滑模控制器 $u(t)$ 可通过式(16)得出.

图1~3分别显示了系统(17)的状态轨迹, 控制信号 $u(t)$ 和积分切换函数 $s(t)$ 的曲线.

仿真结果说明文中所提出的积分滑模控制器设计方法对一类能使用 FHM 逼近的非线性系统是行之有效的.

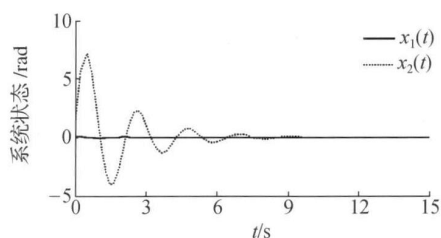


图 1 闭环系统的响应曲线

Fig. 1 State response of closed-loop system

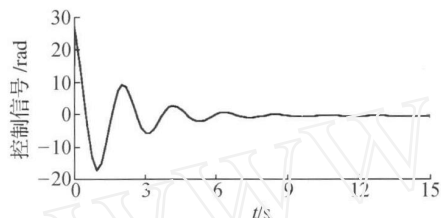


图 2 控制信号

Fig. 2 Control signal

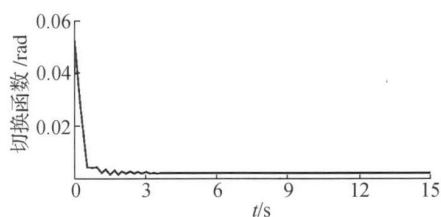


图 3 积分切换函数

Fig. 3 Integral switching function

4 结束语

针对一类连续非线性系统,研究了基于模糊双曲模型的积分滑模控制问题.通过基于 LMI 的方法,给出了使滑模动态渐近稳定的充分条件.并且积分切换函数和积分滑模控制器的实现都依赖于 LMI 的解.因为滑模控制也是一种有效的鲁棒控制方法,所以对这类非线性系统的鲁棒控制将是进一步的研究方向.

参考文献:

- [1] UTKIN V I. Sliding modes in control and optimization [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [2] CHEN Y C, CHANG S. Output tracking design of affine nonlinear plant via variable structure system [J]. IEEE Trans Autom Control, 1992, 37(11): 1823-1828.
- [3] ZHENG F, WANG Q W, LEE T H. Output tracking control of MIMO fuzzy nonlinear systems using variable structure control approach [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2002, 10(6): 686-697.

- [4] NIU Y, HO D W C, LAM J. Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay [J]. Automatica, 2005, 41(5): 873-880.
- [5] WANG L X, MENDEL J M. Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-square learning [J]. IEEE Trans Neural Netw, 1992, 3(5): 807-814.
- [6] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues [J]. IEEE Trans Fuzzy System, 1996, 4(1): 14-23.
- [7] ZHANG H, QUAN Y. Modeling, identification and control of a class of nonlinear system [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2001, 9(2): 349-354.
- [8] ZHANG H, WANG Z. Chaotifying fuzzy hyperbolic model using adaptive inverse optimal control approach [J]. Int J Bifurc Chaos, 2004, 14(10): 3505-3517.
- [9] 张化光, 全永兵. 基于模糊双曲正切模型的一类稳定的模糊控制器设计 [J]. 控制与决策, 2002, 17(6): 956-957.
- ZHANG Huaguang, QUAN Yongbing. Design of stable fuzzy controller based on fuzzy hyperbolic model [J]. Control and Decision, 2002, 17(6): 956-957.
- [10] YANG J, LIU D, FENG J, et al. Controller design for a class of nonlinear systems based on fuzzy hyperbolic model [C]// Proc of WCICA06. Dalian, China, 2006.
- [11] ZHANG H, YANG J. Delay-dependent stability of a class of nonlinear systems with time delays based on fuzzy hyperbolic model [C]// ICIC 2006. [S. l.]: Springer, 2006.
- [12] APKARIAN P, TUAN H D, BERNUSSOU J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and synthesis with enhanced linear matrix inequalities characterizations [J]. IEEE Trans Autom Control, 2001, 46(12): 1941-1946.

作者简介:



杨 珺,男,1976 年生,博士研究生,主要研究方向为模糊控制、非线性系统、智能算法等。



张化光,男,1959 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为复杂系统的智能控制、非线性控制、混沌控制等.发表论文 200 余篇,出版专著 4 部。