

# 型隶属函数的典型模糊控制器的解析结构

张香燕,张乃尧

(清华大学 自动化系,北京 100084)

**摘要:**研究了一种新型的典型模糊控制器,它的输入隶属函数采用型样条函数,具有二阶逼近特性,而一般典型模糊控制器采用的三角形隶属函数只具有一阶逼近特性,因此研究这种新型的模糊控制器具有重要的意义.文章首先给出了该类典型模糊控制器的定义,推导了它的解析表达式,证明了该类典型模糊控制器可以等效为一个全局的二维继电器和一个局部的非线性PD控制器之和.在此基础上,给出了其极限特性和非线性特性.

**关键词:**典型模糊控制器;型隶属函数;解析结构

**中图分类号:**TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1673-4785(2008)01-0031-07

## Analytical structure of a classic fuzzy controller with membership functions

ZHANG Xiang-yan, ZHANG Nai-yao

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** A new classic fuzzy controller with membership functions is proposed. The function, a spline function with two-order approximation, has been widely used in approximation theory. Since fuzzy controllers with triangular membership functions are only universal approximators with only first-order approximation accuracy, it is very valuable to study the property of fuzzy controllers with membership functions. In this paper, we define the new fuzzy controller, deduce its output expression and prove that the controller is equivalent to an integration of a two-dimensional multilevel relay and a local nonlinear PD controller. On this basis, we finally analyze the limiting and nonlinear properties of the controller.

**Keywords:** classic fuzzy controller; membership function; analytical structure

自从1972年Zadeh教授提出模糊控制的基本原理以来,由于模糊控制器的不确定性以及结构的复杂性,使得它的研究一般采用黑箱方法,这与经典控制理论中广泛采用的基于解析分析的技术方法大有不同,不能对系统特性和性能进行有效的数学分析.为了对模糊控制器的结构进行深入研究,从1989年开始,应浩教授等开创了采用解析分析方法研究模糊控制器的结构这一新的研究方向,并取得了诸多重要的研究成果<sup>[2-6]</sup>,这也引起了国内外学者的关注<sup>[7-13]</sup>. Ying<sup>[3]</sup>最先证明了2个线性输入模糊集,4个模糊规则,Zadeh模糊逻辑AND和OR操作的重心解模糊器的最简单Mamdani模糊控制是

非线性PI控制器,之后很多学者对此进行了深入扩展研究<sup>[4-11]</sup>,也得到了一类T-S模糊控制器的解析结构.模糊控制器与线性PI/PD控制器的解析结构关系,说明了它们之间的增益关系,为模糊控制系统的稳定性设计提供了方案<sup>[12-13]</sup>.然而,在目前已有的研究成果中,为了简化模糊控制器的解析表达式推导,隶属函数一般采用三角形隶属函数.但由于三角形函数自身的一些缺点,当其用于函数逼近时有时不能达到预期的良好效果<sup>[14]</sup>.李洪兴教授指出模糊控制器的本质是一类插值器<sup>[15]</sup>,因此模糊控制器的性能与各个变量的隶属函数形状有着密切的关系.Kosko<sup>[15]</sup>也同样指出模糊规则的输入变量的隶属函数形状直接影响着模糊系统对于连续函数的逼近能力.因此寻求一类特殊的能够替代三角形隶属函数的函数具有重要的意义.在纯数学逼近理论,神经网络

收稿日期:2007-06-22.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60474024);教育部博士点专项基金资助项目(20040003106).

通讯作者:张香燕. E-mail: zhangxiangyan03@mails.tsinghua.edu.cn.

络、小波分析中,函数已经被广泛的应用,文献[16]将其引入到模糊系统中,证明了多输入单输出模糊系统具有通用逼近性,而且相对于三角形隶属函数具有更好的非线性逼近能力.而目前型隶属函数的模糊系统解析结构研究仍没有任何成果,这引起了学者的关注.

因此文中针对型隶属函数的本质结构特性进行了专门研究.为了简化模糊系统的解析表达式,文中定义了一类典型的模糊控制器,对其进行了解析分析,并得到其本质结构特性,进而分析了其极限结构和非线性特性.

## 1 数学准备

### 1.1 型函数的定义和性质

定义 1 型函数<sup>[16]</sup>:中心为  $b$ ,宽度为  $2a$  的型函数如图 1 所示,它的数学表达式如式(1),记为  $(x, a, b) \in R$ .

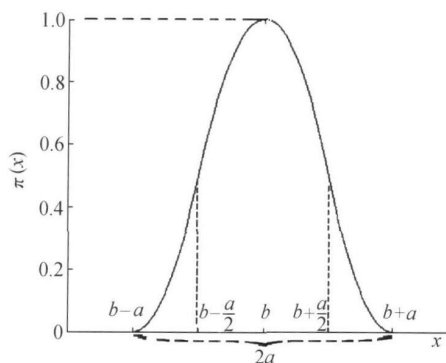


图 1 中心为  $b$ ,宽度为  $2a$  的型函数

Fig. 1 function with center  $b$  and width  $2a$

记:  $x^- = b - a$  为型函数的左端点;

$x^+ = b + a$  为型函数的右端点.

$(x, a, b) =$

$$\begin{cases} 0, & x \leq b - a, \\ 2 \left( \frac{x - b + a}{a} \right)^2, & b - a < x < b - \frac{a}{2}, \\ 1 - 2 \left( \frac{x - b}{a} \right)^2, & b - \frac{a}{2} < x < b + \frac{a}{2}, \\ 2 \left( \frac{x - b + a}{a} \right)^2, & b + \frac{a}{2} < x < b + a, \\ 0, & x > b + a. \end{cases} \quad (1)$$

显然,型函数具有如下性质:

1) 型函数是  $[b - a, b + a]$  上的 3 段二次多项式插值函数,即二阶样条函数;在分段点  $b \pm 0.5a$  处的函数值为 0.5.

2) 型函数关于以中心点  $b$  所做的纵轴对称.

3) 型函数作为隶属函数的模糊集是一个模糊

数.因为  $0 \leq (x, a, b) \leq 1$ , 且  $\{x | (x, a, b) = 1\} \neq \emptyset$ , 所以型函数是一个模糊数,简称为型模糊集合.

### 1.2 型全交叠模糊集合的定义和性质

定义 2 型全交叠模糊集合:对于顺序排列的  $2n+1$  个型模糊集合  $i(x, a_i, b_i) \in R, i = \{-n, -n+1, \dots, n\}, x \in [x^-, x^+]$ . 如果前一个模糊集合  $i$  的中心和后一个模糊集合  $i+1$  的左端点重合,同时后一个模糊集合  $i+1$  的中心和前一个模糊集合  $i$  的右端点重合,即满足条件:

$$\begin{cases} b_{i+1} - a_{i+1} = b_i, \\ b_i + a_i = b_{i+1}, \\ b_{-n} = x^-, \\ b_n = x^+. \end{cases} \quad (2)$$

则称这  $2n+1$  模糊集合为型全交叠模糊集合.注意  $x^-, x^+$  分别为最左端和最右端模糊集的中心点.

定义 3 型全交叠均匀分布模糊集合:设  $i(x, a_i, b_i) \in R, i = \{-n, -n+1, \dots, n\}, x \in [x^-, x^+]$  为型全交叠模糊集合,若所有型隶属函数的宽度均相等,即满足条件:

$$a_i = a_{i+1} = \frac{x^+ - x^-}{2n}. \quad (3)$$

则称为型全交叠均匀分布模糊集合.

以  $n=2$  为例,在  $x \in [-1, 1]$  上,宽度为 1 的型全交叠均匀分布的模糊集合如图 2 所示.

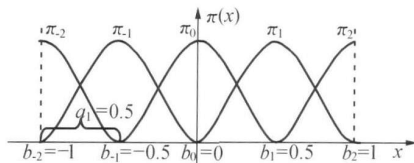


图 2 型全交叠均匀分布模糊集合 ( $n=2$ )

Fig. 2 Fully overlapped equally distributed fuzzy sets ( $n=2$ )

型全交叠模糊集合具有 2 个很好的特性:均匀分布性和一致性.这给模糊控制器的结构分析带来很大的便利.

性质 1 型全交叠模糊集合一定均匀分布.

证明 由定义 2 中的(2)式可得

$$b_{i+1} - a_{i+1} = b_i, b_i + a_i = b_{i+1}.$$

由上述 2 个等式相加可得  $a_{i+1} = a_i$ . 即满足定义 3 中的条件等式(3),因此该模糊集合一定均匀分布.

性质 2 对于型全交叠模糊集合  $i(x, a_i, b_i)$

$R, i = \{-n, -n+1, \dots, n\}, x \in [x^-, x^+], \forall x_0 \in [x^-, x^+]$ , 都有  $\sum_{i=-n}^n i(x_0) = 1$ , 因此型全交叠模糊集合在  $[x^-, x^+]$  上总一致.

证明 因为  $x_0 \in [b_t, b_{t+1}]$ ,不妨设  $x_0 \in [b_t, b_{t+1}]$ ,  
 $t \in [-n, -n+1, \dots, n-1]$ ,在此区间只有  $\mu_t, \mu_{t+1}$   
的值不为 0,即  $\mu_i = 0 (i \neq t, \text{且 } i \neq t+1)$ . 由 函数的  
定义和性质,  $\mu_t, \mu_{t+1}$ 在交叉点的函数值为  $\mu_t(b_t +$   
 $0.5a_t) = \mu_{t+1}(b_{t+1} - 0.5a_{t+1}) = 0.5$ ,因此  $[b_t, b_{t+1}]$   
可分为 2 段  $[b_t, b_t + 0.5a_t]$ 和  $[b_t + 0.5a_t, b_{t+1}]$ . 由于  
型函数的对称性, 只需证明前一区间即可.

$\forall x_0 \in [b_t, b_t + 0.5a_t]$ ,由定义 1 可得

$$\mu_t(x_0) + \mu_{t+1}(x_0) =$$
$$1 - 2\left(\frac{x_0 - b_t}{a_t}\right)^2 + 2\left(\frac{x_0 - b_{t+1} + a_{t+1}}{a_t + 1}\right)^2.$$

由性质 (1) 可得  $a_{t+1} = a_t, b_{t+1} = b_t + a_t$ ,将其代  
入上式得

$$\mu_t(x_0) + \mu_{t+1}(x_0) =$$
$$1 - 2\left(\frac{x_0 - b_t}{a_t}\right)^2 + 2\left(\frac{x_0 - b_t - a_t + a_t}{a_t}\right)^2 = 1.$$

所以,  $\mu_t(x_0) + \mu_{t+1}(x_0) + \sum_{i=1, i \neq t, t+1}^N \mu_i(x_0) = 1$ , 即

$$\sum_{i=1}^N \mu_i(x_0) = 1.$$

2 采用 型隶属函数的典型模糊控制  
器定义

研究的典型模糊控制器为两输入一输出模糊系  
统  $f: U \subset R^2 \rightarrow V \subset R$ ,其中  $U = U_1 \times U_2 \subset R^2$  为输入  
空间,  $V \subset R$  为输出空间,模糊控制系统的结构如图  
3 所示.

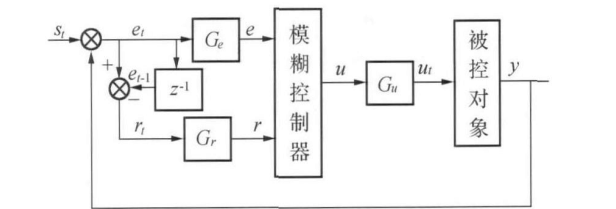


图 3 模糊控制系统的结构图

Fig. 3 The structure of the fuzzy control system

其中,单输入单输出 (SISO) 被控对象的输入为  
 $u_t$ ,输出为  $y_t$ ,参考输入为  $s_t, t$  为离散时间变量,  $T$   
为采样周期. 设模糊控制器的 2 个输入分别为误差  
 $e_t$  和误差的差分  $r_t$ ,输出为  $u_t$ ,即

$$\begin{cases} e_t = s_t - y_t, \\ r_t = e_t - e_{t-1}. \end{cases}$$

引入比例因子  $G_e, G_r, G_u$  使输入输出变量正规  
化,即

$$\begin{cases} e^* = G_e e_t, \\ r^* = G_r r_t, \\ u^* = G_u u_t. \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $e^*, r^*, u^* \in [-1, 1]$ .

设采用 型隶属函数的典型模糊控制器,其设  
计参数如下:

1) 输入和输出变量的模糊集及隶属函数.  
正规化的输入变量  $e^*, r^*$  采用全交叠均匀分布  
的 型隶属函数,如图 4(a) 所示. 正规化的输出变  
量  $u^*$  采用均匀分布的单点隶属函数,如图 4(b) 所  
示. 设  $e^*, r^*$  分别定义  $2n+1$  个模糊集合,其中  $n$  个  
为正,  $n$  个为负, 1 个为零,分别为  $\pi_p^1 (p = -n, \dots, n)$   
和  $\pi_q^2 (q = -n, \dots, n)$ ,模糊集合的中心分别为  $b_p^1 =$   
 $p/n$  和  $b_q^2 = q/n$ ,宽度分别为  $2a^1$  和  $2a^2$ ,相邻模糊集  
中心之间的距离分别为  $a^1 = a^2 = 1/n$ . 输出  $u^*$  定义  
 $4n+1$  个模糊集合,用  $U_z (z = -2n, \dots, 2n)$  表示,  $U_z$   
的中心为  $z = \frac{z}{2n}$ ,相邻模糊子集中心之间的距离为

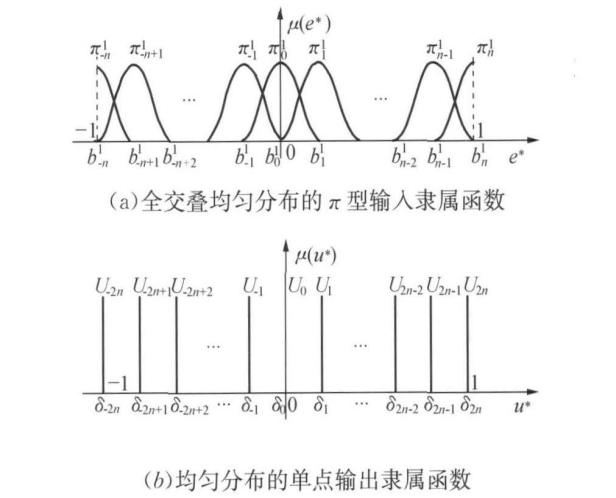
$$s = \frac{1}{2n}.$$


图 4 模糊控制器的输入输出隶属函数

Fig. 4 The membership functions of the input  
variables and the output variable for the  
defined fuzzy controller

2) 模糊控制规则  
这里采用线性控制规则,也就是输出模糊子集  
的下标与输入模糊子集的下标成线性关系. 这里输  
出模糊子集的下标为输入模糊子集下标的和,即  $z =$   
 $p + q$ .  
 $R_{pq}: \text{If } e^* \text{ is } \pi_p^1 \text{ and } r^* \text{ is } \pi_q^2, \text{ Then } u^* \text{ is } U_z.$   
( $p = -n, \dots, n; q = -n, \dots, n; z = -2n, \dots, 2n$ )  
3) 模糊推理方法  
采用 Sum-Product 模糊推理方法.

$$\text{Sum} : x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_r = \min\{1, x_1 + x_2 + \dots + x_r\},$$

$$\text{Product} : x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_r = x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_r.$$

#### 4) 解模糊方法

由性质 2 和 型隶属函数的性质可知,任意几个规则的激活度之和必然小于等于 1,所以 Sum-Product 中的有界和可以用普通和代替,因此采用重心法解模糊可得模糊控制器的输出为

$$u^* = \frac{\sum_{p,q=-n}^n p(e^*) q(r^*) (p+q)s}{\sum_{p,q=-n}^n p(e^*) q(r^*)}. \quad (5)$$

### 3 型典型模糊控制器的解析表达式及结构分析

为不失一般性,设  $e^* \in [b_p^1, b_{p+1}^1]$ ,  $r^* \in [b_q^2, b_{q+1}^2]$ ,  $p \in \{-n, \dots, n-1\}$ ,  $q \in \{-n, \dots, n-1\}$ . 在此区域只有 4 条模糊规则被激活,即

If  $e^*$  is  $\frac{1}{p}$  and  $r^*$  is  $\frac{2}{q}$ , Then  $u^* = (p+q)s$ ;  
If  $e^*$  is  $\frac{1}{p}$  and  $r^*$  is  $\frac{2}{q+1}$ , Then  $u^* = (p+q+1)s$ ;  
If  $e^*$  is  $\frac{1}{p+1}$  and  $r^*$  is  $\frac{2}{q}$ , Then  $u^* = (p+q+1)s$ ;  
If  $e^*$  is  $\frac{1}{p+1}$  and  $r^*$  is  $\frac{2}{q+1}$ , Then  $u^* = (p+q+2)s$ ;

由(5)式得

$$u^* = \frac{\sum_{p,q=-n}^n p(e^*) q(r^*) (p+q)s}{\sum_{p,q=-n}^n p(e^*) q(r^*)} = \frac{\frac{p}{p+q+1} \frac{q}{p+q+1} (p+q)s + \frac{p}{p+q+1} \frac{q+1}{p+q+1} (p+q+1)s + \frac{p+1}{p+q+1} \frac{q}{p+q+1} (p+q+1)s + \frac{p+1}{p+q+1} \frac{q+1}{p+q+1} (p+q+2)s}{\frac{p}{p+q+1} \frac{q}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} \frac{q+1}{p+q+1} + \frac{p+1}{p+q+1} \frac{q}{p+q+1} + \frac{p+1}{p+q+1} \frac{q+1}{p+q+1}},$$

$$\text{分母} = \frac{q}{p+q+1} + \frac{q+1}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} + \frac{p+1}{p+q+1} =$$

$$\left( \frac{p}{p+q+1} + \frac{p+1}{p+q+1} \right) \frac{q}{p+q+1} + \left( \frac{p}{p+q+1} + \frac{p+1}{p+q+1} \right) \frac{q+1}{p+q+1} =$$

$$\frac{q}{p+q+1} + \frac{q+1}{p+q+1} = 1,$$

$$\text{分子} = \frac{p}{p+q+1} \frac{q}{p+q+1} (p+q)s + \frac{p}{p+q+1} \frac{q+1}{p+q+1} (p+q+1)s +$$

$$\frac{p+1}{p+q+1} \frac{q}{p+q+1} (p+q+1)s + \frac{p+1}{p+q+1} \frac{q+1}{p+q+1} (p+q+2)s =$$

$$\left( \frac{p}{p+q+1} + \frac{p+1}{p+q+1} \right) \frac{q}{p+q+1} (p+q)s +$$

$$\left( \frac{p+1}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} \right) \frac{q+1}{p+q+1} s =$$

$$(p+q)s + \left( \frac{p+1}{p+q+1} + \frac{q+1}{p+q+1} \right) s = \frac{p+q}{2n} + \frac{p+1+q+1}{2n}.$$

因此,可得

$$u^* = \frac{p+q}{2n} + \frac{p+1+q+1}{2n}. \quad (6)$$

根据 型典型模糊控制器的解析表达式,研究了它的结构特性,极限特性和非线性特性,总结成下面 3 个定理.

定理 1 (型典型模糊控制器的结构定理)

型典型模糊控制器可以等效为一个全局的二维继电器和一个局部的非线性 PD 控制器之和.

证明 根据上面推导出的典型模糊控制器的解析表达式(6)式分为 2 部分,即

$$u^* = g(p, q) + L(e^*, r^*), \quad (7)$$

$$g(p, q) = \frac{p+q}{2n}, \quad (8)$$

$$L(e^*, r^*) = \frac{p+1(e^*) + q+1(r^*)}{2n}. \quad (9)$$

式中:  $g(p, q)$  的作用是全局性的,只与  $e^*$ 、 $r^*$  所在的小区间在整个输入空间中的位置有关,因此是一个全局的二维继电器. 而  $L(e^*, r^*)$  与  $p+1(e^*)$  和  $q+1(r^*)$  有关,由于采用均匀分布的隶属函数,各个模糊集合的宽度相同,  $p+1(e^*)$  和  $q+1(r^*)$  只与  $e^*$  和  $r^*$  相对于模糊集合中心点的距离相关,即与  $e^*$ 、 $r^*$  在小区间内的相对位置有关,所以,  $L(e^*, r^*)$  的作用是局部性的,且是一个非线性的 PD 控制器.

以  $n=2$  为例,  $g(p, q)$  和  $u^*$  的控制曲面分别如图 5 和图 6 所示.

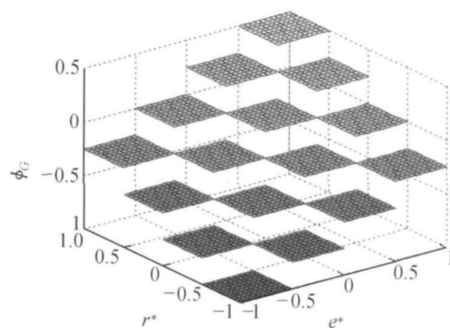


图 5  $\Phi_G(p, q)$  的控制曲面图

Fig. 5 Control surface of  $\Phi_G(p, q)$

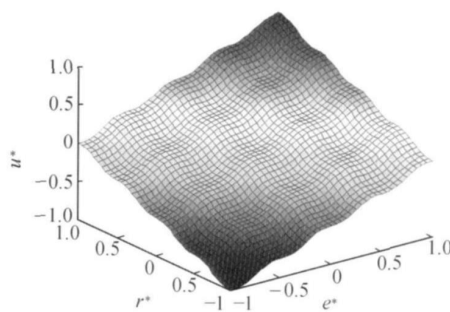


图 6  $u^*$  的控制曲面图

Fig. 6 Control surface of  $u^*$

注释 1 当典型模糊控制器的输出为  $u_t = u_t - u_{t-1}$  时, 型典型模糊控制器可以等效为一个全局的二维继电器和一个局部的非线性 PI 控制器之和,即:

$$u^* = \frac{p+q}{2n} + \frac{p+1+q+1}{2n} = g(p,q) + L(e^*,r^*).$$

定理 2( 型典型模糊控制器的极限定理) 对于 型典型模糊控制器,当 2 个输入变量的模糊集个数趋向无穷时,全局的二维继电器趋近于线性 PD 控制器,而局部的非线性控制器将会消失,即:

$$\begin{cases} u_n^* = g(p,q) + L(e^*,r^*), \\ g(p,q) = \lim_n g(p,q) = \frac{1}{2}(e^* + r^*), \\ L(e^*,r^*) = \lim_n L(e^*,r^*) = 0. \end{cases}$$

证明篇幅较长,见附录.

注释 2 由定理 2 可知,当 2 个输入变量的模糊集个数  $n$  趋向无穷时, 型典型模糊控制器的输出等效于一个线性 PD 控制器,其比例和微分放大系数分别为  $K_P = \frac{1}{2}, K_D = \frac{1}{2}$ .

定义 3 模糊控制器的非线性度 定义为<sup>[6]</sup>

$$= \frac{|\phi_{L_{\max}}|}{|\phi_{L_{\max}}| + |\phi_{G_{\max}}|}.$$

定理 3( 型典型模糊控制器的非线性定理) 型典型模糊控制器的非线性度为  $1/n$ .

证明 因为

$$\begin{aligned} &= \frac{|\phi_{L_{\max}}|}{|\phi_{L_{\max}}| + |\phi_{G_{\max}}|} = \frac{1}{n}. \\ |\phi_{L_{\max}}| &= \max_{\substack{p = -n, \dots, n-1 \\ q = -n, \dots, n-1}} \left| \frac{p+q}{2n} \right| = \frac{2(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{n}, \end{aligned}$$

又因为

$$|\phi_{G_{\max}}| = \max_{\substack{p = -n_1, \dots, n_1-1 \\ q = -n_2, \dots, n_2-1}} \left| \frac{p+1+q+1}{2n} \right| = \frac{1}{n},$$

所以,  $= \frac{|\phi_{L_{\max}}|}{|\phi_{L_{\max}}| + |\phi_{G_{\max}}|} = \frac{1}{n}.$

注释 3 由定理 3 可知, 型典型模糊控制器的非线性度只与输入变量定义的模糊集合的个数  $n$  有关,  $n$  越大,非线性度越小. 当输入空间进行无穷划分,也就是每个子区域足够小时, 型典型模糊控制器收敛为一个线性 PD 控制器,其非线性度也逐渐趋于 0.

4 结束语

文章推导了具有 型隶属函数的典型模糊控制

器的解析表达式,得到了该模糊控制器可以等效为一个全局的二维继电器和一个局部的非线性 PD 控制器之和的结论; 并且研究了其极限特性和非线性特性, 得出了其非线性度只与输入变量的模糊集合个数有关,模糊集合个数越多,非线性度越小的结论. 由于 型隶属函数具有二阶逼近性能,而且型全交叠模糊集合具有均匀分布性和一致性,这给模糊控制器的结构分析带来了很大的便利,也为型隶属函数的典型模糊控制器的稳定性设计奠定了基础. 然而三角形隶属函数的模糊控制器具有简单易实现的优点,因此在 型隶属函数的控制器设计中,如何平衡控制器的逼近性和设计的简单性值得进一步的深入研究.

附录

定理 2 的证明.

1)  $g(p,q)$  部分的证明.

由  $g(p,q)$  的定义和式(8)可得:

$$g(p,q) = \lim_n g(p,q) = \lim_n \frac{p+q}{2n}.$$

因为  $e^* \in [b_p^1, b_{p+1}^1], r^* \in [b_q^2, b_{q+1}^2]$ ; 即  $e^* \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}], r^* \in [\frac{q}{n}, \frac{q+1}{n}]$ , 所以,当  $n$  时,  $e^* = \frac{p}{n}, r^* = \frac{q}{n}$ ,代入上式可得:

$$g(p,q) = \lim_n \frac{p+q}{2n} = \frac{1}{2}(e^* + r^*).$$

2)  $L(e^*,r^*)$  部分的证明.

由  $L(e^*,r^*)$  的定义和式(9)可得:

$$L(e^*,r^*) = \lim_n \left[ \frac{p+1(e^*) + q+1(r^*)}{2n} \right].$$

因为  $e^* \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}], r^* \in [\frac{q}{n}, \frac{q+1}{n}]$ , 当  $n$  时,  $e^* = \frac{p}{n}, \frac{1}{2n}, r^* = \frac{q}{n}, \frac{1}{2n}$ , 即  $ne^* = p, \frac{1}{2}, nr^* = q, \frac{1}{2}$ .

由 型隶属函数的定义,可得

当  $e^* \in [\frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}]$  时,

$$\begin{aligned} \mu_p(e^*) &= 1 - 2 \left( \frac{x - b_p^1}{a_1} \right)^2 = \\ &= 1 - 2 \left( \frac{e^* - p/n}{1/n} \right)^2 = 1 - 2(ne^* - p)^2; \end{aligned}$$

当  $e^* \in [\frac{p}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n}]$  时,

$$\mu_p(e^*) = 2 \left( \frac{x - b_p^1 - a_1}{a_1} \right)^2 =$$

$$2 \left( \frac{e^* - p/n - 1/n}{1/n} \right)^2 = 2(ne^* - p - 1)^2.$$

同理可得  $q(r^*)$  的分段隶属度函数.

并且由定理 1 可知

$$p(e^*) + p+1(e^*) = 1, \quad q(r^*) + q+1(r^*) = 1.$$

综上, 可得  $e^*$  和  $r^*$  的隶属度函数如表 1、2 所示. 并将表 1、2 中的值代入式(3)中, 可得到  $L(p, q)$ , 如表 3 所示.

表 1 输入  $e^*$  在区间  $\left[\frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right]$  上的隶属函数值  $p(e^*), p+1(e^*)$

Table 1 The value of  $p(e^*)$  and  $p+1(e^*)$  for  $e^*$  in  $\left[\frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right]$

	$p(e^*)$	$p+1(e^*)$
$e^* \left[ \frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{2n} \right]$	$1 - 2(ne^* - p)^2$	$2(ne^* - p)^2$
$e^* \left[ \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \right]$	$2(ne^* - p - 1)^2$	$1 - 2(ne^* - p - 1)^2$

表 2 输入  $r^*$  在区间  $\left[\frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n}\right]$  上的隶属函数值  $q(r^*), q+1(r^*)$

Table 2 The value of  $q(r^*)$  and  $q+1(r^*)$  for  $r^*$  in  $\left[\frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n}\right]$

	$q(r^*)$	$q+1(r^*)$
$r^* \left[ \frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{2n} \right]$	$1 - 2(nr^* - q)^2$	$2(nr^* - q)^2$
$r^* \left[ \frac{q}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n} \right]$	$2(nr^* - q - 1)^2$	$1 - 2(nr^* - q - 1)^2$

下面针对表格 3 中的 4 种情况分别讨论:

第 1 种情况:

$$L(p, q) = \lim_n L(p, q) = \lim_n \frac{(ne^* - p)^2 + (nr^* - q)^2}{n},$$

$$\text{又因为 } e^* \left[ \frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{2n} \right], r^* \left[ \frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{2n} \right],$$

因此  $0 \leq ne^* - p \leq \frac{1}{2}, 0 \leq nr^* - q \leq \frac{1}{2}$  可得  $0$

$$2(ne^* - p)^2 + 2(nr^* - q)^2 \leq 1. \text{ 所以, } L(p, q) = \lim_n L(p, q) = 0.$$

表 3  $e^* \left[ \frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \right], r^* \left[ \frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n} \right]$  区域内的控制曲面  $L(p, q)$

Table 3 The value of  $L(p, q)$  for  $e^*$  in  $\left[\frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right]$  and  $r^*$  in  $\left[\frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n}\right]$

$e^*$	$r^*$	
	$r^* \left[ \frac{q}{n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{2n} \right]$	$r^* \left[ \frac{q}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n} \right]$
$e^* \left[ \frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{2n} \right]$	$\frac{(ne^* - p)^2 + (nr^* - q)^2}{n}$	$\frac{1 + 2(ne^* - p)^2 - 2(nr^* - q - 1)^2}{2n}$
$e^* \left[ \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \right]$	$\frac{1 - 2(ne^* - p - 1)^2 + 2(nr^* - q)^2}{2n}$	$\frac{1 - (ne^* - p - 1)^2 - (nr^* - q - 1)^2}{n}$

第 2 种情况:

$$\lim_n \frac{1 + 2(ne^* - p)^2 - 2(nr^* - q - 1)^2}{2n},$$

$$L(p, q) = \lim_n L(p, q) =$$

$$\text{又因为 } e^* \left[ \frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{2n} \right], r^* \left[ \frac{q}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{q}{n} + \frac{1}{n} \right],$$

因此,  $0 \leq ne^* - p - \frac{1}{2} \leq nr^* - q - 1 \leq 0$ , 得

$\frac{1}{2} \leq 1 + 2(ne^* - p)^2 - 2(nr^* - q - 1)^2 \leq \frac{3}{2}$ . 所以,

$$\mu_L(p, q) = \lim_n \mu_L(p, q) = 0.$$

第 3 种情况:

同理,  $-\frac{1}{2} \leq ne^* - p - 1 \leq 0, 0 \leq nr^* - q \leq \frac{1}{2}$ ,

因此,  $\frac{1}{2} \leq 1 - 2(ne^* - p - 1)^2 + 2(nr^* - q)^2 \leq \frac{3}{2}$ .

所以,  $\mu_L(p, q) = \lim_n \mu_L(p, q) = 0$ .

第 4 种情况,

同理,  $-\frac{1}{2} \leq ne^* - p - 1 \leq 0, -\frac{1}{2} \leq nr^* - q - 1 \leq 0$ . 因此  $1 - 2(ne^* - p - 1)^2 - 2(nr^* - q - 1)^2 \leq 2$ . 所以,  $\mu_L(p, q) = \lim_n \mu_L(p, q) = 0$ .

综合以上 4 种情况可得  $\mu_L(p, q) = \lim_n \mu_L(p, q) = 0$ .

## 参考文献:

- [1]王立新. 模糊系统与模糊控制教程[M]. 王迎军,译. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [2]SILER W, YING H. Fuzzy control theory: the linear case [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(2): 275-290.
- [3]YING H, SILER W, BUCKLEY J J. Fuzzy control theory: a nonlinear case [J]. Automatica, 1990, 26(3): 513-520.
- [4]YING H. The simplest fuzzy controllers using different methods are different nonlinear proportional-integral controllers with variable gains [J]. Automatica, 1993, 29: 1579-1589.
- [5]YING H. A nonlinear fuzzy controller with linear control rules is the sum of a global two-dimensional multilevel relay and a local nonlinear proportional-integral controller [J]. Automatica, 1993, 29(2): 499-505.
- [6]YING H. Fuzzy control and modeling: analytical foundations & applications [M]. New York: IEEE Press, 2000.
- [7]LI N, ZHANG N Y, JIN K Y. Structure analysis of typical fuzzy controllers with unevenly distributed input membership functions[J]. Journal of Tsinghua University, 2000, 40(1): 120-123.
- [8]曾珂, 张乃尧, 徐文立. 采用伪梯形隶属函数的一类模糊控制器的结构分析[J]. 中国科学(E), 2000, 30(4): 320-330.  
ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Structure analysis of a class of fuzzy controllers using pseudo trapezoid shaped membership functions[J]. Science in China (Series E), 2000, 43(3): 263-274.
- [9]FAN X Z, ZHANG N Y, Li N. Structure analysis of typical fuzzy controllers with unequally spaced fuzzy sets for input and output variables [J]. Chinese Journal of Electronics, 2001, 10(3): 326-331.
- [10]DU X Y, ZHANG N Y, YU N. Structure analysis and function evaluation of a kind of fuzzy PID controllers [J]. Chinese Journal of Electronics, 2004, 13(4): 654-659.
- [11]DU X Y, ZHANG N Y. Structure analysis of MISO typical fuzzy controllers [J]. Advances in System Science and Applications, 2004, 4(2): 169-174.
- [12]李少远, 田永青. 模糊控制器的结构化分析及系统化设计方法[J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 435-438.  
LI Shaoyuan, TIAN Yongqing. Structure analysis and systematic design of typical fuzzy controllers [J]. Control and Decision, 2001, 16(4): 435-438.
- [13]HU B G, MANN G K I, GOSINE R G. New methodology for analytical and optimal design of fuzzy PID controllers [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 521-539.
- [14]MITAIM S, KOSKO B. The shape of fuzzy sets in adaptive function approximation [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 9(4): 637-656.
- [15]李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. 中国科学(E 辑), 1998, 28(3): 259-267.  
LI Hongxing. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. Science in China (Series E), 1998, 28(3): 259-267.
- [16]HASSINE R, KARRAY F. Approximation properties of piecewise parabolic functions fuzzy logic systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 501-515.

## 作者简介:



张香燕,女,1982年生,博士研究生,主要研究方向为模糊系统与分层模糊系统,在国内外期刊和会议上共发表文章 5 篇。



张乃尧,男,1946年生,教授,博士生导师,主要研究方向为模糊控制理论及应用、机器人足球、音乐情感识别等。已发表论文 100 余篇,其中被 SCI 检索 10 余篇,EI 检索 30 余篇。