

多边形序列的最短路径算法

李发捷¹, KLETTE Reinhard²

(1. 格罗宁根大学 数学与计算科学学院, 荷兰 格罗宁根 9700; 2. 奥克兰大学 计算机科学系, 新西兰 奥克兰 1142)

摘 要: 给定平面上一个含 k 个简单多边形的序列及一个起点 p 和一个终点 q , 近似地计算一条最短路径使得它开始于 p 点, 然后按指定的次序访问每个多边形, 最后终止于 q 点. 如果多边形是两两不相交且是非凸的, 那么此问题至今还没有算法解. 应用一种 R 算法, 给出复杂性为 $() \cdot O(n)$ 的一种近似算法, 这里 n 是给定多边形的顶点总数, 函数 $()$ 定义为 L_0 与 L 的差与 L 的商, 其中 L_0 是初始路径长度, L 是最优路径长度, $()$ 是计算精确度. 给定的 R 算法稍作修改也能用来近似地解决 3 个 NP 完全或 NP 困难的三维欧几里德最短路径问题 (ESP). 它们的复杂性均为 $() \cdot O(k)$, 这里 k 是含有所给定的障碍物的堆的层数.

关键词: R 算法; 最短路径; 旅游多边形; 部件切割; q 矩形

中图分类号: TP202⁺ 7 文献标识码: A 文章编号: 1673-4785(2008)01-0023-08

Shortest path algorithms for sequences of polygons

LI Fa-jie¹, KLETTE Reinhard²

(1. Institute for Mathematics and Computing Science, University of Groningen P. O. Box 800, 9700 AV Groningen, The Netherlands; 2. Computer Science Department, The University of Auckland Private Bag 92019, Auckland 1142, New Zealand)

Abstract : Given a sequence of k simple polygons in a plane, and a start point p , a target point q . We approximately compute a shortest path that starts at p , then visit each of the polygons in the specified order, and finally end at q . So far no solution is known if the polygons are disjoint with each other and non-convex. By applying a rubberband algorithm, we give an approximate algorithm with time complexity in $() \cdot O(n)$, where n is the total number of vertices of the given polygons, and function $()$ is the difference between L_0 and L over L , where L_0 is the length of the initial path, and L is the true (i. e., optimum) path length. The given rubberband algorithm can also be applied to solve approximately three NP-complete or NP-hard 3D Euclidean shortest path (ESP) problems in $() \cdot O(k)$, where k is the number of layers in a stack which contains the defined obstacles.

Key words : rubberband algorithm; shortest paths; touring polygons; parts cutting; q rectangles

本文报告 R 算法的一些应用. R 算法最初由文献[1]提出, 然后文献[2]加以详细研究. 在详细说明 R 算法之前, 首先描述 2 个紧密相关的问题, 旅游多边形问题和部件切割问题, 文中将给出它们的近似解. 本文第 2 节介绍 R 算法的基本原理和一些应用时应注意的问题, 第 3 节举例说明它关于旅游多边形问题和 q 矩形问题的应用, 第 4 节结束全文.

收稿日期: 2007-06-16.
通讯作者: 李发捷. E-mail: F. li @rug. nl.

1 问题的提出

1. 1 旅游多边形问题

回忆文献[3]所引入的一些概念和符号. 该文首次提出旅游多边形问题. 假设 R^2 是一个平面, 它可以表示成 R^2 . 考虑多边形 $P_i \subset R^2$, 这里 $i = 1, 2, \dots, k$ 及两点 $p, q \in R^2$. 假如 $p_0 = p$ 及 $p_{k+1} = q$, $p_i \in R^2$, 此处 $i = 1, 2, \dots, k$, $p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 表示路径 $p p_1 p_2 \dots p_k q \subset R^2$. 假如 p, q 表示路径 $p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 不会引起混淆, $p_i \in P_i$ 满足 p_i 是 ∂P_i 上的一点, p_i 上的沿着路径第一点 (∂P_i 表示 P_i 的边界, 以下

同),那么说路径 p, q 访问 P_i 于 p_i 点,此处 $i = 1, 2, \dots, k$.

无约束 TPP 问题定义如下:

在平面上如何寻找出一条欧几里德最短路径

$p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$, 使得它按给定次序 ($i = 1, 2, \dots, k$) 访问每个多边形 P_i .

假定对于任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\partial P_i \cap \partial P_j = \emptyset$, 而且每个 P_i 都是凸的, 文献[3]讨论这类特别情形并且给出复杂性为 $O(kn \log(n/k))$ 的算法解. 这里 n 是平面上所有多边形 P_i 的顶点总数, $i = 1, 2, \dots, k$.

根据他们的结果, 文献[3]指出, “一个最能引起兴趣的公开的问题是确定两两不相交的非凸的简单多边形的 TPP 复杂性”.

本文 3.1 节的算法 2 针对这个问题给出一个复杂性为 $O(n) \cdot O(n)$ 的一种近似算法, 这里 n 是给定所有多边形的顶点总数, 是精确度.

1.2 部件切割问题

在各种各样的加工工业上, 例如制衣、制窗、机械加工等, 常常需要从大片的纸、布料、玻璃、金属上面切割出很多的部件 (假如以简单多边形为模型). 受到这些应用的启发, 文献[4]提出 3 种切割模式:

1) 连续切割问题: 切割工具访问每个对象 (例如简单多边形) 正好一次. 切割刀具可以从对象的边缘上任意一点开始, 但在移动到下一对象前必须切割完整个对象. 因此, 那个对象的进入点和离开点必须是同一点.

2) 端点切割问题: 进入和退出每个对象的某个预先规定的边沿点. 但可以切割每个对象成为几个部分. 也就是说, 它可以重复地访问一个对象.

3) 间歇切割问题: 这是最一般的情形. 每个对象可以被切割成为几个部分而且进入和离开点没有受到限制.

文献[4]集中考虑每个对象都是一个简单多边形的连续切割问题. 他们称这个问题为模板切割旅行售货员问题 (P-TSP). 它是著名的旅行售货员问题 (TSP) 的推广^[5].

P-TSP 可进一步推广到广义的 TSP (GTSP)^[6-7]. 如果每个多边形都退化成一个单一顶点, 那么 P-TSP 就变成 TSP, 是已知 NP 困难的^[8]. 由此可知 P-TSP 也是 NP 困难的.

P-TSP 的困难使得文献[4]添加上一个条件来考虑这个问题: 假定所有多边形都按一个给定的次序访问 (见图 1), 于是基于一种拉格朗日放松方

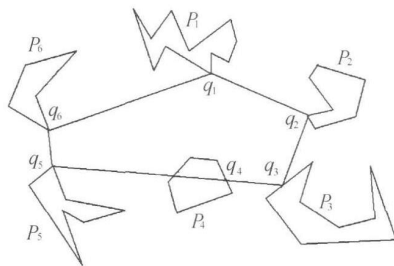


图 1 说明文献[4]中简化的 P-TSP (假定这里多边形按照给定次序访问)

Fig. 1 Illustration for the simplified P-TSP in Ref. [4] where polygons are assumed to be given in a particular order

法^[9-10], 进而按启发式方法解决这个简化了的 P-TSP. 但它没有给出这个方法的复杂性分析的证明. 作为文献[4]的工作的后续工作, 文献[11]证明了一个进一步简化了的 P-TSP (即文献[11]只考虑凸多边形, 且这些多边形按照给定次序访问) 是多项式时间可解的 (见图 2). 如果再加上一个条件: 起点是给定的 (见图 3), 那么称他们能解决这个问题, 算法的复杂性是 $O(kn \log(n/k))$. 这里 n 是平面上所有多边形的顶点总数, $\partial P_i \subset \partial P_j, i = 1, 2, \dots, k$.

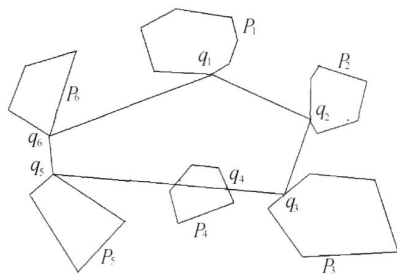


图 2 说明文献[11]中进一步简化的 P-TSP (假定这里多边形全是凸的)

Fig. 2 Illustration for the further simplified P-TSP in Ref. [11] also assuming convex polygons

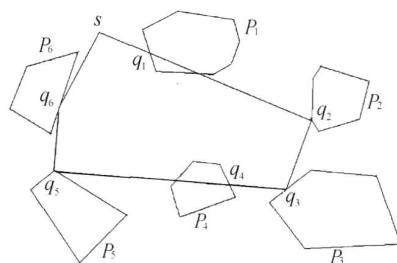


图 3 说明文献[3]中的 P-TSP (假定这里给定起点 s)

Fig. 3 Illustration for the P-TSP as considered in Ref. [3], now also with a given start point s

2 R 算法

利用以下一个非常简单的二维例子来说明 R 算法的基本思想. 考虑无约束 TPP 的一个退化情形:每个多边形都收缩成一条单一的直线段(见图 4). 以下的算法是 R 算法的简化了的版本(“弧版本”). 它可以说明原始的 R 算法的基本原理.

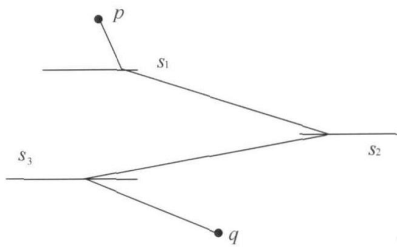


图 4 TSP 的退化情形, $k=3$

Fig. 4 Degenerate case of the TPP, for $k=3$

算法 1

- 1) Let $\epsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).
- 2) 计算初始路径 $L = p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 的长度 l_1 .
- 3) Let $q_1 = p$ and $i = 1$.
- 4) while $i < k - 1$ do
 Let $q_i = p_{i+1}$;
 计算一个点 $q_2 \in s_i$ 使得
 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in s_i\}$. ($d_e(q_1, q_2)$ 表示两点 q_1, q_2 间的欧几里德距离);
 更换 p_i 为 q_2 以更新路径;
 Let $q_1 = p_i$ and $i = i + 1$.
- 5) Let $q_k = q$,
 计算一个点 $q_2 \in s_k$ 使得
 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in s_k\}$;
 更换 p_k 为 q_2 以更新路径.
- 6) 计算更新路径 $L = p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 的长度 l_2 .
- 7) Let $\Delta = l_1 - l_2$.
- 8) 如果 $\Delta > \epsilon$, 令 $l_1 = l_2$, 转到 3).
 否则, 停止.

步骤 1) 的精确度参数 ϵ 可以选定给定计算机所能保证的最大可能的数量精确度.

在本文的其余的部分称 $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 为 R 算法的脚步集, 而每个 s_i 是 R 算法的一个脚步元素. 在一个脚步集中, 可能出现 2 个脚步元素具有相

同的端点的情形. 例如, 假设算法 1 的输入为下列的数据:

$s_1 = q_1 q_2, s_2 = q_2 q_3, q_1 = (0, 0), q_2 = (2, 4), q_3 = (3, 0), p = (1, 0)$, 及 $q = (2, 0)$ (见图 5).

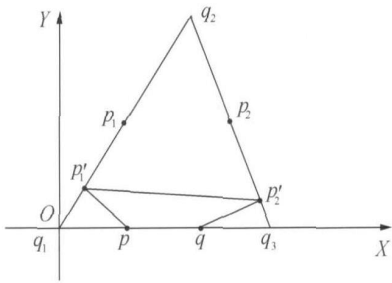


图 5 说明 2 个脚步元素可能含有相同的端点

Fig. 5 Illustration for identical endpoints of steps

作为初始, 假设 p_1 和 p_2 分别是 s_1 和 s_2 的中点. 也就是说, $p_1 = (1, 2)$ 和 $p_2 = (2.5, 2)$. 这样就得到初始多边形线路(即包含于多边形边界的一条路径) $L = p, p_1, p_2, q$ 的长是 5.5616. 算法 1 找到近似的最短路径是 $L = p, p_1, p_2, q, p_1 = (0.3646, 0.7291), p_2 = (2.8636, 0.5455)$, 它的长是 4.4944(见表 1).

表 1 初始由图 5 说明的重复数 I 和结果 Δ

($p_1 = (1, 2)$ 和 $p_2 = (2.5, 2)$ 作为初始点)

Table 1 Number I of iterations and resulting Δ

for the initialization illustrated by Fig 5

(with $p_1 = (1, 2)$ and $p_2 = (2.5, 2)$ as initialization points)

I	Δ
1	- 0.890 0
2	- 0.175 2
3	- 0.001 9
4	- 1.293 5e - 005
5	- 8.443 5e - 008
6	- 5.493 0e - 010
7	- 3.574 0e - 012

现在假定一个不同的初始点的输入, 使得 $p_1 = p_2 = q_2$. 在这种情形下, 算法 1 的 4) 中的第 4) 步的输出将是错误的: 所计算的路径 $L = p, p_1, p_2, q$, $p_1 = q_2$ 和 $p_2 = q_2$. 它的长是 8.1231. (文献[2]的引理 16, 看到在这个例子里, $p_1 = p_0, p_2$).

称这个初始例子的情形为应用 R 算法时出现的一条退化路径. 它可能出现在算法的初始化或算法后面的重复迭代中间. 一般地说, 它是定义成为初

始的或更新的多边线路出现至少 2 个线段含有一个相同的顶点. 这样的退化情形造成算法 1 的 4) 中的步失效.

每一条退化路可以近似地处理如下: 令 p_2 q_2 . 为此, 从线段 s_1 和 s_2 中切除掉一段充分小的线段. 以下的例子说明对于假定的输入数据如何处理这样的退化情形.

修改 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 的初始值为 $= 2.221 \times$

10^{-16} ; $x_1 = 2 -$, $y_1 = 2x_1$; $x_2 = 2 +$, $y_2 = -4(x_2 - 3)$; $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$. 此外, 假定精确度改为 $= 1 \times 10^{-100}$.

初始的多边线路 $= p, p_1, p_2, q$ 的长等于 8.123 1. 算法 1 可计算出最短路径 $= p, p_1, p_2, q, p_1 = (0.364\ 6, 0.729\ 1)$, $p_2 = (2.863\ 6, 0.545\ 5)$. 它的长等于 4.494 4(见表 2).

表 2 初始由图 5 说明的重复数 I 和结果 $s(p_1 = (2 - , 2(2 -))$ 和 $p_2 = (2 + , -4((2 +) - 3))$ 作为初始点, $= 2.221e - 16$).

Table 2 Number I of iterations and resulting s , for the step set shown in Fig. 5 ($p_1 = (2 - , 2(2 -))$ and $p_2 = (2 + , -4((2 +) - 3))$ as initialization points and $= 2.221e - 16$)

I		I		I		I	
1	- 5.483 1e - 007	7	- 1.231 3	13	- 7.031 9e - 010	19	8.881 8e - 016
2	- 6.277 9e - 006	8	- 2.0286	14	- 4.573 2e - 012	20	8.881 8e - 016
3	- 7.781 7e - 005	9	- 0.210 4	15	- 3.019 8e - 14	21	8.881 8e - 016
4	- 9.647 1e - 004	10	- 0.002 4	16	- 8.881 8e - 016	22	8.881 8e - 016
5	- 0.011 9	11	- 1.655 0e - 005	17	8.881 8e - 016	23	- 8.881 8e - 016
6	- 0.143 0	12	- 1.080 9e - 007	18	- 8.881 8e - 016	24	0

当然, 如果让精确度 $= 1 \times 10^{-10}$, 那么算法将要在较少重复后更快地终止. 在实验环境为 Matlab 7.04, 奔腾 4 个人电脑的情况下, 如果改变 ϵ 的值为 $= 2.22 \times 10^{-16}$, 那么得到与初始点 $p_1 = p_2 = q_2$ 同样的错误结果. 这是因为计算机不能识别 x_1 和 $x_1 \pm 2.22 \times 10^{-16}$ 之间的差别. 然而, 对于实际应用, 数值 $= 2.221 \times 10^{-16}$ 在这种特别的算法实现环境下, 应当是足够小或者说足够精确了.

3 应 用

利用 R 算法的特别版本(变形)来近似地解决 2 个计算问题.

3.1 旅游多边形问题

本文这一节的主要算法给出本文 1.1 节提到的公开问题的近似算法解. 它是算法 1 经修改而获得的(2 个算法的差别仅在于 4)和 5)).

算法 2

- 1) Let $\epsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).
- 2) 计算初始路径 $= p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 的长度 l_1 .
- 3) Let $q_1 = p$ and $i = 1$.

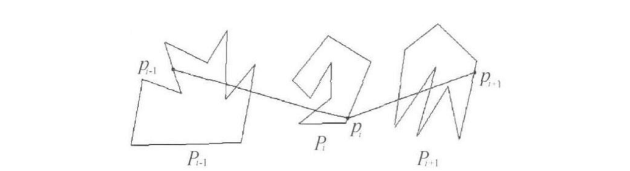


图 6 说明算法 2 的 4) 和 5) 的初始化

Fig. 6 Illustration for the initialization for steps 4) and 5) in algorithm 2

- 4) while $i < k - 1$ do
 - Let $q_2 = p_{i+1}$;
 - 计算一个点 $q_2 \in P_i$ (参见文献[12]中引理 53 的证明) 使得 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in P_i\}$ (其中 ∂P_i 是多边形 P_i 的边界);
 - 更换 p_i 为 q_2 以更新路径 ;
 - Let $q_1 = p_i$ 和 $i = i + 1$.
- 5) Let $q_3 = q$;
- 计算一个点 $q_3 \in P_k$ 使得 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in P_k\}$;
- 更换 p_k 为 q_3 以更新路径 .
- 6) 计算更新路径 $= p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 的长

度 l_2 .

7) Let $l_2 = l_1 - l_2$.

8) 如果 $l_2 > 0$, 令 $l_1 = l_2$, 返回 3).

否则, 停止.

算法 2 的输入例子见图 7. 图 8 显示一些测量的时间用以说明算法的时间复杂性(正确性和时间复杂性的证明见文献[2]). 解旅游问题、动物园看护人问题、约束 TPP 问题和看守人路线问题的算法都可以由修改算法 2 而获得^[2]).

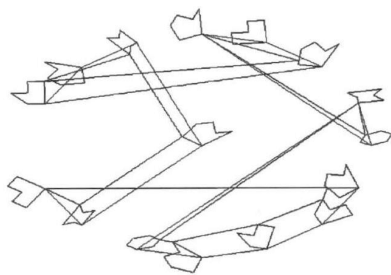


图 7 算法 2 的输入例子

Fig. 7 Input example for algorithm 2

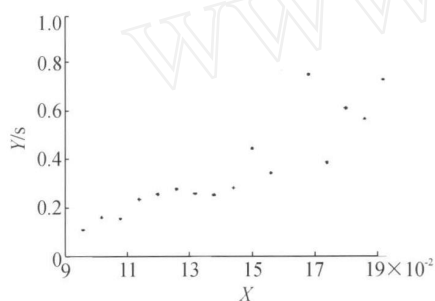


图 8 算法 2 的运行时间

Fig. 8 Measured run times for algorithm 2

以下的子程序用以处理退化路出现的情形. 当应用算法 3(它是算法 2 的一个变形)于无约束 TPP 时, 因为所有的多边形未必都有两两不相交的, 有必要处理这样情况.

子程序 1

输入: 一点 p 和 2 个多边形 P_1 和 P_2 使得 $p \notin P_1 \cap P_2$ (见图 9).

$\partial P_1 \cap \partial P_2$ (见图 9).

输出: 一点 $q \in \partial P_1$ 使得 $d_e(q, p) < d_e(q, p)$ 而且 $q \notin \partial P_2$.

1) Let $\epsilon = 10^{-10}$ (选定精确度);

2) 寻找一点 $e_j \in E(P_j)$ 使得 $p \in e_1 \cup e_2$, 此处 $j = 1, 2$;

3) Let $e_1 = q_1 q_2$. 假设 q_3 和 q_4 分别是线段 $q_1 p$ 和 $q_2 p$ 上的两点 (见图 9) 使得 $d_e(q_j, p) < \epsilon$ 而且 $q_j \notin \partial P_2$, 此处 $j = 1, 2$;

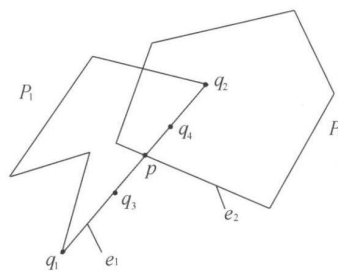


图 9 说明子程序 1

Fig. 9 Illustration for procedure 1

4) Let $q = \min\{q_3, q_4\}$ (点的坐标按字典排列次序比较大小).

5) 输出 q .

如果存在 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 使得 $i \neq j, \partial P_i \cap \partial P_{i+1} \neq \emptyset$, 那么修改算法 2 如下: 假设 $p_0 = p, p_{k+1} = q, P_0 = p$, 而且 $P_{k+1} = q$ (算法 2 与算法 3 的差别仅在 4) 中的 q 和 5) 中的 q). 假设 $P = \{p, p_1, p_2, \dots, p_k, p\}$.

算法 3

1) Let $\epsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).

2) 计算初始路径 $P = p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 的长度 l_1 .

3) Let $q_1 = p$ and $i = 1$.

4) while $i < k - 1$ do

如果 $(p_i = p_{i-1} \text{ 且 } p_i \neq p_{i+1})$ 或 $(p_i \neq p_{i-1} \text{ 且 } p_i = p_{i+1})$ 或 $(p_i = p_{i-1} \text{ 且 } p_i = p_{i+1})$, 那么应用子程序 1 计算一点 p_i 使得 $p_i \neq p_{i-1}$ 且 $p_i \neq p_{i+1}$;

Let $q_3 = p_{i+1}$;

计算一个点 $q_2 \in \partial P_i$ (参见文献[2]中引理 53 的证明) 使得 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in \partial P_i\}$ (其中 ∂P_i 是多边形 P_i 的边界.);

更换 p_i 为 q_2 以更新路径;

Let $q_1 = p_i$ 和 $i = i + 1$.

5) 如果 $(p_k = p_{k-1} \text{ 且 } p_k \neq p_{k+1})$ 或 $(p_k \neq p_{k-1} \text{ 且 } p_k = p_{k+1})$ 或 $(p_k = p_{k-1} \text{ 且 } p_k = p_{k+1})$, 那么应用子程序 1 计算一点 p_k 使得 $p_k \neq p_{k-1}$ 且 $p_k \neq p_{k+1}$;

Let $q_3 = q$;

计算一个点 $q_2 \in \partial P_k$ 使得 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in \partial P_k\}$;

更换 p_k 为 q_2 以更新路径.

6) 计算更新路径 $P = p, p_1, p_2, \dots, p_k, q$ 的长边 l_2 .

7) Let $l_1 = l_2$.

8) 如果 $l_1 > l_2$, 令 $l_1 = l_2$, 转 3).

否则, 停止.

文献[2]的 11.5 节应用这个算法证明在所有简单多边形是未必两两不相交和非凸的情形下, TPP 可以有复杂性为多项式时间的近似算法解:

定理 1^[2] 无约束 TPP 存在复杂性为 $O(n)$ 的一种近似算法, 这里 n 是给定多边形的顶点总数.

根据以下定理, 寻找这个问题的精确解是 NP 困难的:

定理 2^[3] 对于任何 Minkowski 距离 $L_p (p \geq 1)$, 如果多边形 P_i 是非凸的, 且它们的边与 x 轴成 $0^\circ, 45^\circ$ 或 90° , 那么旅游多边形问题 (TPP) 是 NP 困难的.

3.2 q 矩形

对于放置于笛卡尔直角坐标系 xyz 中的三维欧几里德空间中一个简单多面体 (即一个同胚于一个单位球的紧的多面体区域), 表示为 P . 假设 P 的边集是 E , 顶点集是 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

对于 $p \in E$, 假设 p 是经过 p 而且平行于 xoy 面的平面, P_p 是有限个简单多边形组成的集合. 单个点看作是一个退化多边形. 假设 P 是一个由 p 和 P_p 决定的这类简单多边形.

任何简单多边形 P 是 P_p 的一个连通部分, 称为 P 的相对于 p 的一个关键多边形.

任何顶点 p 决定有限个关键多边形集. 考虑任何顶点 p 只确定一个关键多边形而且它是凸的情形: 一个简单多面体是一个一型简单多面体当且仅当任何顶点恰好确定一个凸关键多边形 (图 10 (a)). 一个简单多面体是一个二型简单多面体当且仅当任何顶点恰好确定一个关键多边形 (图 10 (b)).

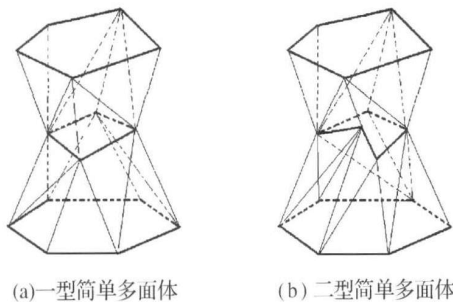


图 10 简单多面体

Fig. 10 Polyhedron

这一段应用算法 2 有效地解 2 个特殊的 ESP 问题. 还指出了, 这两问题的“补问题”是 NP 困难的或 NP 完全的.

关键多边形的概念的推广: 假定 P 是一个简单连通 (可能无界) 的多面体, 而且允许关键多边形是无界的. 例如, 一个广义关键多边形可以有一个顶点在无穷远, 或它可以是一个关键多边形的补.

使用文献[12]所引入的一些概念, 假设 (x_0, y_0, z_0) 是三维空间中的一个点,

$$S_1 = \{(x, y, z_0) : x_0 < x < y_0, y < y_0\};$$

$$S_2 = \{(x, y, z_0) : -\infty < x < x_0, y_0 < y < \infty\};$$

$$S_3 = \{(x, y, z_0) : -\infty < x < x_0, -\infty < y < y_0\};$$

$$S_4 = \{(x, y, z_0) : x_0 < x < -\infty, y_0 < y < \infty\}.$$

S_i 称为一个 i 型 q 矩形, 这里 $i = 1, 2, 3, 4$. 进而, 假设 (x_1, y_1, z_0) 是三维空间中的一个点, 满足 $x_1 > x_0$ 且 $y_1 > y_0$.

$$S_h = \{(x, y, z_0) : -\infty < x < y_0, y < y_1\};$$

$$S_v = \{(x, y, z_0) : x_0 < x < x_1, -\infty < y < \infty\}.$$

假设 $S_h (S_v)$ 称为一个水平 (垂直) 条,

$$S_{h_1} = \{(x, y, z_0) : x_0 < x < y_0, y < y_1\};$$

$$S_{h_2} = \{(x, y, z_0) : -\infty < x < x_1, y_0 < y < y_1\};$$

$$S_{v_1} = \{(x, y, z_0) : x_0 < x < x_1, y_0 < y < \infty\};$$

$$S_{v_2} = \{(x, y, z_0) : x_0 < x < x_1, -\infty < y < y_0\}.$$

按照它们的几何形状, 注意到

$S_1 [S_2, S_3, S_4]$ 在 $(+x, +y) [(-x, +y), (-x, -y), (+x, -y)]$ 方向上是无界的; $S_h [S_v]$ 在 $\pm x [\pm y]$ 方向上是无界的; $S_{h_1} [S_{h_2}, S_{v_1}, S_{v_2}]$ 在 $+x [-x, +y, -y]$ 方向上是无界的.

S_i, S_h, S_v, S_{h_j} 和 S_{v_j} 是轴对准矩形 (见图 11), 这里 $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2$. 如果 S 中每个矩形在 4 个方向 $-x, +x, -y$ 或 $+y$ 中至少一个方向上是无界的, 轴对准矩形的堆 (一个两两平行但不相交的轴对准矩形的集合) S 称为类似地形的.

例 1 假设 P 是一个简单多面体满足每个广义关键多边形是轴对准矩形. 假设 $p, q \in V$ 满足 $p_z < q_z, V_{pq} = \{v : p_z < v_z < q_z \text{ 且 } v \in V\}$, 这里 V 是 P 的顶点集. 由文献[2]的定理 27 可知, 包含于 V_{pq} 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(|V_{pq}|)$ 来近似计算. 因此, 这种特别的情形的 ESP 问题可以有效地近似解决. 然而, 如果修改使得每个广义关键多边形是一个轴对准矩形的

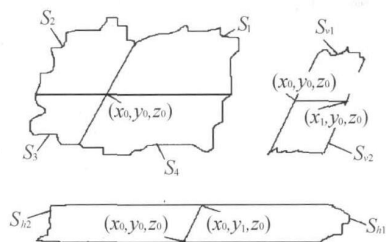


图 11 轴对准矩形

Fig. 11 Axis-aligned rectangles

补,那么根据定理 3,寻找包含于 S 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径是 NP 完全的.

定理 3^[12] 判定是否存在一个长最多 L 的,回避以轴对准矩形堆为障碍物的,轴一对准矩形堆中的欧几里德最短路径是 NP 完全的. 如果所有轴对准矩形是一或三型 q 矩形,那么此问题在这种特别的情形下也是 NP 完全的.

例 2 修改例 1 当中的 S :假设 S 是一个简单多面体满足每个广义关键多边形是一个三角形. 由文献[2]的定理 27 可知,包含于 S 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(n) \cdot O(|V_{pq}|)$ 来近似计算. 因此,这种特别的情形的 ESP 问题可以有效地近似解决. 然而,如果修改 S 使得每个广义关键多边形是一个三角形的补,那么根据定理 4,寻找包含于 S 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径是 NP 完全的:

定理 4^[13] 判定是否存在一个长最多为 L 的,回避以三角形堆为障碍物的,欧几里德最短路径是 NP 困难的.

在本文以下的 3.3 节的例 3 和例 4,近似地解决这 2 个非常困难的问题.

3.3 3 个 NP 完全或 NP 困难问题

正如本文 3.2 节一样,再次推广关键多边形的概念,同样允许无界的多边形. 现在应用推广的算法 2 近似地解决本文 3.2 节所提到的困难问题.

例 3 修改例 1 如下:假设 S 是一个单连通多面体,满足每个关键多边形是一个轴对准矩形的补. 假设 p, q 满足 $p_z < q_z$,这里 V 是 S 的顶点集. 由文献[2]的定理 32 可知,包含于 S 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(n) \cdot O(|V_{pq}|)$ 来近似计算. 因此,这种特别的情形的 ESP 问题可

以有效地近似解决(见图 12).

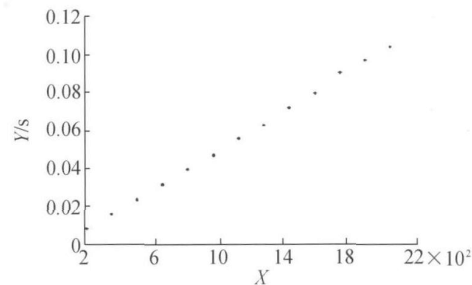


图 12 算法 2 应用于 q 矩形的补的运行时间

Fig. 12 Illustration of measured run time for algorithm 2 applied to the complements of q rectangles.

例 4 修改例 2 如下(也只是稍微修改例 2 当中的 S):假设 S 是一个单连通多面体满足每个关键多边形是一个三角形的补. 由文献[2]的定理 32 可知,包含于 S 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(n) \cdot O(|V_{pq}|)$ 来近似计算.

例 5 假设 S 是 k 个水平或垂直条的堆. 包含于 S 中的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(n) \cdot O(k)$ 近似计算. 根据定理 5,寻找该问题的精确解是 NP 完全的.

定理 5^[12] 判定是否存在一个长最多为 L 的,回避以水平或垂直条的堆为障碍物的,欧几里德最短路径是 NP 完全的.

例 6 假设 S 是 k 个类似地形的,轴对准矩形的堆,包含于 S 中的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(n) \cdot O(k)$ 来近似计算. 根据定理 6,寻找该问题的精确解的最好的已知算法的复杂性是 $O(k^4)$:

定理 6^[12] 假设 S 是 k 个地形的,轴对准矩形的堆, S 中的欧几里德最短路径可以以复杂性 $O(k^4)$ 来计算.

例 6 说明了一个最好的已知算法的复杂性是 $O(k^4)$ 的精确解问题却可以以复杂性 $O(n) \cdot O(k)$ 来近似计算(精确度参数 ϵ 可以选定给定计算机所能保证的最大可能的数量精确度).

4 结束语

本文首先详细介绍一个简单版本的 R 算法作为引导这个算法逼近的基本思想. 然后从一个实例,而且给出一个一般的程序来解释如何处理退化路径. 最后文章报告当应用 R 算法的几个版本时的结果. 实例说明 R 算法定义了一个广阔的可应用的算

法种类而且均以线性的复杂性近似地解决几个困难的几何问题。

参考文献:

- [1] BULOW T, KLETTE R. Digital curves in 3D space and a linear-time length estimation algorithm[J]. IEEE Trans Pattern Analysis Machine Intelligence, 2002, 24(7): 962 - 970.
- [2] LI F, KLETTE R. Exact and approximate algorithms for the calculation of shortest paths[R]. IMA Minneapolis 2006. www.ima.umn.edu/preprints/oct2006.
- [3] DROR M, EFRAT A, LUBIWI A, et al. Touring a sequence of polygons[C]// ProcSTOC. San Diego, USA, 2003.
- [4] HOEFT J, PALEHAR U S. Heuristics for the platecutting traveling salesman problem[J]. IIE Transactions, 1997, 29(9): 719 - 731.
- [5] LAWLER E, LENSTRA J, RINNOOY K A, et al. The traveling salesman problem[M]. New York: John Wiley and Sons, 1985.
- [6] LAPORTE G, MERCURE H, NOBERT Y. Generalized traveling salesman problem through n clusters[J]. Discrete Applied Mathematics, 1987, 18(2): 185 - 197.
- [7] NOON C E, BEAN J C. An efficient transformation of the generalized traveling salesman problem[J]. INFOR, 1993, 31: 39 - 44.
- [8] GAREY M R, GRAHAM R L, JOHNSON D S. Some NP-complete geometric problems[C]// Proc ACM Sympos Theory Computing. Hershey, USA, 1976.
- [9] GEOFFRION A M. Lagrangean relaxation and its uses in integer programming[J]. Mathematical Programming Study, 1974(2): 28 - 114.
- [10] GUIGNARD M, KIM S. Lagrangean decomposition: a model yielding stronger Lagrangean bounds[J]. Mathematical Programming, 1987, 31(3): 271 - 274.
- [11] DROR M. Polygon plate-cutting with a given order[J]. IIE Transactions, 1999, 31(3): 271 - 274.

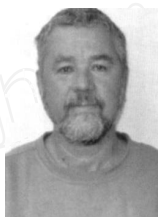
[12] MITCHELL J S B, SHARIR M. New results on shortest paths in three dimensions[C]// Proc SCG Brooklyn. New York, 2004.

[13] CANNY J, REIF J H. New lower bound techniques for robot motion planning problems[C]// Proc IEEE Conf Foundations Computer Science. Los Angeles, USA, 1987.

作者简介:



李发捷,男,1965年生,博士,荷兰格罗宁根大学博士后,主要研究方向为数字几何、计算几何、天文数据的计算机视觉分析,发表论文10余篇。



KLETTE Reinhard,男,1950年生,博士,教授,主要研究方向为并行计算、图像处理、计算机视觉、数字几何、计算几何,发表论文250多篇,出版专著8部,编辑专著21部。

KLETTE Reinhard 教授担任“IEEE Trans. PAMI”(Associate Editor),“CAAI Transactions on Intelligent Systems(智能系统学报)”(Member of Editorial Board),“Springers Computational Imaging and Vision”(Editor),“International Journal of Computer Vision”(Member of Editorial Board),“Machine GRAPHICS & VISION”(Member of Advisory Board),“Opto-Electronics Review”(Member of Editorial Advisory Board)等期刊的编辑或委员。是以下国际学术会议的主要发起人:CAIP conferences(International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns)(Member of Steering Committee)。是28场国际学术会议(在智利、德国、新西兰、台湾等地)的主席或副主席。是2005年DAGM奖获得者之一。曾应邀在阿根廷、中国、印度、意大利、新西兰、台湾和美国等地国际学术会议作报告。在德国柏林技术大学、德国哥廷根大学和新西兰奥克兰大学已指导培养14名博士和100多名硕士。